

# La trace *via* le calcul résiduel : une nouvelle version du théorème d'Abel inverse, formes abéliennes

Martin Weimann

Laboratoire analyse et géométrie

Université Bordeaux1

351, cours de la Libération

33045 TALENCE

27 Mai 2004

Le théorème d'Abel inverse affirme qu'il suffit qu'un germe de trace de forme méromorphe soit rationnel pour qu'il se prolonge en la trace d'une forme rationnelle sur une sous-variété algébrique. Ce résultat a été prouvé dans le cas trace nulle par P.A. Griffiths en 1976 [7] puis dans le cas trace rationnelle par G. Henkin et M. Passare en 1999 [12]. On montre ici qu'il suffit que la trace soit rationnelle en les paramètres qui ne correspondent pas aux pentes pour retrouver la conclusion du théorème d'Abel-inverse. La démonstration s'appuie essentiellement sur le calcul résiduel (courant résiduel, résidus ponctuels et théorème de dualité) qui permettent d'un côté de caractériser les formes traces d'une manière particulièrement algébrique et d'un autre côté de reconstituer un ensemble analytique et une forme méromorphe à partir des traces d'un nombre fini de fonctions. Cette démonstration permet d'établir le lien avec le théorème de Wood. De plus, on retrouve les bornes de Castelnuovo pour la dimension de l'espace des  $q$ -formes abéliennes sur une hypersurface de  $\mathbb{P}^{n+1}$ . Les résultats présentés ici s'inspirent principalement des travaux d'Alain Yger [15]. Des idées similaires ont été développées récemment et indépendamment par B. Fabre dans le cas plus général des courants localement résiduels [6].

## 1 Introduction

La donnée d'un sous-ensemble analytique fermé  $V$  de codimension pure  $r$  d'un domaine  $D \subset \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$  et d'une forme  $(q, 0)$  méromorphe  $\Phi$  sur  $V$  ( $0 \leq q \leq \dim V = n+1-r$ ) permettent de définir sur  $D$  le courant  $[V] \wedge \Phi$  à support dans  $V$  ; pour toute forme test  $\phi$  (de bidegré  $(n+1-r-q, n+1-r)$ ),

on pose formellement :

$$\langle [V] \wedge \Phi, \varphi \rangle = \int_V \Phi \wedge \varphi.$$

Plus précisément si  $\delta$  désigne le dénominateur universel pour les formes méromorphes sur  $V$  au voisinage d'un point  $z \in V$ , l'action du courant  $[V] \wedge \Phi$  sur une forme de bidegré  $(n+1-r-q, n+1-r)$  de support dans un voisinage suffisamment petit de  $z_0$  est définie comme la valeur en  $\lambda = 0$  du prolongement méromorphe de la fonction

$$\lambda \rightarrow \int_{V \setminus \text{Sing}(V)} |\delta|^{2\lambda} \Phi \wedge \varphi$$

(on montre que ce prolongement méromorphe n'a pas de pôle en  $\lambda = 0$ ). On dit que  $\Phi$  est régulière sur  $V$  (au sens de Barlet, [2, 12]) si ce courant est  $\bar{\partial}$ -fermé dans  $D$ . Dans le cas où  $\Phi$  est une forme de degré maximal sur  $V$ , ce courant est  $d$ -fermé en dehors du lieu polaire de  $\Phi$ . Si l'on suppose  $D$   $r$ -concave (c'est à dire réunion d'espaces linéaires de dimension  $r$  appelés  $r$ -plans) avec  $r = n+1-p = \text{codim } V$ , on peut définir l'ouvert  $D^* \subset \mathbb{G}(r, n+1)$ ,  $r$ -dual de  $D$ , dont les éléments  $t$  paramètrent les  $r$ -plans  $L_t$  inclus dans  $D$ . On peut alors définir la variété d'incidence de  $D$  comme étant la sous-variété analytique de  $D \times D^*$  définie comme

$$\text{INCID}_D := \{(z, t) \in D \times D^* ; z \in L_t\}.$$

On note  $p_1$  et  $p_2$  les projections naturelles respectives de  $\text{INCID}_D$  sur  $D$  et  $D^*$ . Le fait que  $p_1$  soit une submersion et que  $p_2$  soit propre sur le support du courant  $\Phi \wedge [V]$  (la propriété de  $p_2$  est liée à la compacité de l'espace projectif) permettent de définir un nouveau courant appelé transformée d'Abel de  $\Phi \wedge [V]$ , noté  $A(\Phi \wedge [V])$ , ce en posant

$$A(\Phi \wedge [V]) := (p_2)_*(p_1^*(\Phi \wedge [V]))$$

Ce nouveau courant est une forme méromorphe définie sur  $D^*$  de même type que  $\Phi$  que l'on appelle la trace de  $\Phi$  sur  $V$  que l'on notera  $\text{Tr}_V(\Phi)$ <sup>1</sup>. Pour  $t$  générique, le calcul de cette trace consiste à sommer les formes  $\xi_j^*(\Phi)$  où les points  $\xi_j(t)$  sont les points d'intersections de  $V$  avec  $L_t$  (ces derniers étant en nombre fini, ce nombre restant localement constant). L'approche plus

---

<sup>1</sup>en général la trace d'un courant désigne l'image directe de celui-ci par une application propre sur le support du courant. Ici c'est quelque peu différent car la trace correspond à l'image directe du courant  $p_1^*(\Phi \wedge [V])$  par la projection sur  $D^*$ .

formelle *via* les courants a l'avantage de ne plus se soucier des singularités de  $V$ . On peut se référer à [12] pour un rappel de ces diverses notions ainsi que pour une présentation de cette approche *via* la théorie des courants.

On s'intéresse ici au cas particulier où  $V$  est une réunion finie de germes d'hypersurfaces (éventuellement singulières et non réduites) coupées (mais non incluses) par une droite de  $D$  et  $\Phi$  est un germe de forme méromorphe de degré maximal sur  $V$  (*i.e.* de type  $(n, 0)$ ). Dans ce cas il s'avère que la donnée du couple  $(V, \Phi)$  est équivalente à la donnée d'un couple  $(F, H)$  de polynômes à une variable dont les coefficients sont des germes de fonctions méromorphes en les paramètres de  $D^*$  vérifiant quelques conditions algébriques particulièrement simples. Bien que la démonstration de cette équivalence soit basée sur le théorème de préparation de Weierstrass, la construction des deux polynômes  $F$  et  $H$  se fait aisément *via* le calcul résiduel. En effet, les coefficients de  $F$  et  $H$  sont uniquement déterminés par un système linéaire non dégénéré dont les coefficients sont obtenus comme les traces d'un nombre fini de fonctions (ce sont donc des sommes complètes de résidus). Ce phénomène permet de caractériser uniquement le couple  $(V, \Phi)$  en terme des traces  $\text{Tr}_V(y^k)$  et  $\text{Tr}_V(y^k\Phi)$ , pour  $k = 0, \dots, 2d - 1$  (où  $d := \text{Tr}_V 1$ ), *calculées suivant une famille de droites d'une même direction donnée*<sup>2</sup>. Ce nouveau résultat permet de voir la trace de  $\Phi$  sur  $V$  comme un calcul de résidus d'une fonction rationnelle d'une variable, c'est-à-dire comme un calcul de reste dans une simple division euclidienne (cette approche se trouvait déjà en fait esquissée dans l'article de P.A. Griffiths [7]). Ce point de vue permet de redémontrer le théorème d'Abel inverse sous une version plus forte ; en effet on montre alors que la rationalité de la trace en  $n$  des  $2n$  variables de  $D^*$  suffit pour conclure que  $V$  est alors une courbe algébrique et  $\Phi$  une forme rationnelle sur  $V$ . On comprendra ainsi le lien avec le théorème de Wood qui affirme qu'il est équivalent que  $V$  soit algébrique de degré  $d$  et que la trace de  $y$  soit affine en  $n$  des  $2n$  variables (c'était en fait une des motivations de ce travail). Pour finir, on retrouve les bornes de Castelnuovo pour majorer la dimension de l'espace des  $q$ -formes abéliennes (*i.e.* de trace nulle), bornes atteintes dans le cas  $q = n$  (voir [11] par exemple pour une approche *via* les tissus).

L'aspect global du calcul résiduel permet de ne plus travailler localement avec le théorème des fonctions implicites et le lemme de Darboux (ingrédient essentiel dans la preuve d'Henkin et Passare) et donc de ne plus se

---

<sup>2</sup>en fait en restreignant à une seule projection, on retombe sur le concept de trace usuel originellement développé par Barlet [2], et on retrouve ses résultats de caractérisation des formes régulières

soucier que les germes soient lisses ou réduits ; on esquivé également ainsi les théorèmes d'Hartogs et de Remmert-Stein. De plus la preuve du théorème de préparation de Weierstrass peut s'obtenir à partir du calcul de résidus [8] ; il en est de même pour la construction du couple  $(F, H)$  et la trace est ainsi une forme différentielle dont les coefficients sont des sommes complètes de résidus de polynômes à une variable, c'est-à-dire des restes de divisions euclidiennes dans l'anneau des polynômes. En ce sens, on peut parler de l'aspect très algébrique du théorème d'Abel et de son inversion, et plus généralement du concept de trace. Ce type de construction suggère de nouvelles démonstrations pour des généralisations du théorème d'Abel inverse, par exemple en remplaçant les espaces linéaires par une famille continuellement paramétrée d'ensembles algébriques de même dimension et de degré donné [5].

## 2 Les coefficients de la trace exprimés en termes de sommes de résidus

Soit  $V$  un sous-ensemble analytique de codimension  $r$  d'un domaine  $r$ -concave  $D \subset \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ . Soit  $\Phi$  une  $q$ -forme méromorphe sur  $V$  (c'est-à-dire localement la restriction à  $V$  d'une forme méromorphe dans l'espace ambiant et dont le lieu polaire  $\text{Pol}(\Phi)$  vérifie  $\dim(\text{Pol}(\Phi) \cap V) < n + 1 - r = \dim V$ ). En utilisant l'interprétation de la trace en termes de courants, on montre ici par dualité que les coefficients de la trace s'expriment en termes de l'action de courants résiduels et sont en fait des sommes complètes de résidus fonctions des paramètres  $t$  de l'espace  $r$ -dual  $D^*$  de  $D$ . Dans un premier temps on utilise les variables  $Z$  pour  $D$  et  $t$  pour  $D^*$ . Pour toute forme-test  $\varphi$  (de type correctement choisi en fonction du type de  $\Phi$ ) de  $D^*$ , on a par définition

$$\begin{aligned} \langle \text{Tr}_V(\Phi), \varphi \rangle &= \int_{D^*} \text{Tr}_V(\Phi)(t) \wedge \varphi(t) \\ &= \int_{\text{INCID}_D} ([p_1^{-1}(V)] \wedge p_1^*[\Phi]) \wedge p_2^*(\varphi)(Z, t). \end{aligned}$$

En notant alors  $[I_D]$  le courant d'intégration associé au sous-ensemble analytique  $\text{INCID}_D$  de  $D \times D^*$ , on obtient l'expression

$$\langle \text{Tr}_V \Phi, \varphi \rangle = \int_{D \times D^*} ([V](Z) \wedge [I_D](Z, t)) \wedge \Phi(Z) \wedge \varphi(t) = \langle T, \varphi \rangle$$

où le  $(q + n + 1, n + 1)$ -courant  $T := ([V](Z) \wedge [I_D](Z, t)) \wedge \Phi(Z)$  a pour image directe par  $p_2$  un courant forme méromorphe de même type que  $\Phi$

correspondant précisément à la trace de  $\Phi$ . On voudrait expliciter dans des cartes affines de la grassmannienne les coefficients de ce courant dans le cas d'une hypersurface  $V \subset D$  (on retrouve alors la transformée d'Abel-Radon usuelle). Quitte à faire agir un automorphisme de  $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ , on peut toujours supposer, si l'on note  $(x_1, x_2, \dots, x_n, y, z)$  les coordonnées homogènes dans  $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$  que la droite verticale  $x_1 = \dots = x_n = 0$  est incluse dans  $D$  et coupe  $V$  en un nombre fini de points n'appartenant pas à l'hyperplan à l'infini  $z = 0$ . Ceci reste valable pour les droites voisines de  $x = 0$  ce qui permet d'utiliser les coordonnées affines  $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y)$  au voisinage de  $V$  et d'utiliser les coordonnées  $(a, b) = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)$  pour paramétrer l'ouvert affine de  $(\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C}))^*$  constitué des droites  $L_{(a,b)}$  voisines de la droite verticale  $x = 0$ , où  $L_{(a,b)}$  est la droite projective définie en coordonnées affines  $(x, y)$  par les équations

$$L_i(x, y, a, b) = x_i - a_i y - b_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dans ce cas, en supposant que  $V = \{f(x, y) = 0\}$ , on obtient (en utilisant les notations standard, voir par exemple [13], pour désigner les courants résiduels de Coleff-Herrera dans le cas intersection complète) l'expression locale de  $T$  :

$$T = \Phi \wedge df \wedge \left( \bigwedge_{i=1}^n d_{(x,y,a,b)} L_i \right) \wedge \bar{\partial} \left( \frac{1}{f} \right) \wedge \left( \bigwedge_{i=1}^n \bar{\partial}_{(x,y,a,b)} \left( \frac{1}{L_i} \right) \right)$$

Examinons deux cas particuliers.

### 1. Le cas où $\Phi$ est une fonction sur $V$

Si la forme  $\Phi$  est une 0-forme, c'est-à-dire une fonction méromorphe sur  $V$  ayant au voisinage de  $V$  dans  $D$  une expression globale  $\Phi = h/g$  où  $h$  et  $g$  sont holomorphes en les coordonnées affines  $(x, y)$  et le lieu des zéros de  $g$  coupe proprement  $V$ , l'expression de la trace de  $\Phi$  au voisinage de  $t = 0$  dans  $D^*$  est, en terme de calcul résiduel :

$$\text{Tr}_V \left( \frac{h}{g} \right) = \left\langle \left[ \frac{1}{g} \right] \bar{\partial} \left( \frac{1}{f} \right) \wedge \bigwedge_{i=1}^n \bar{\partial}_{(x,y)} \left( \frac{1}{L_i} \right), h J(f, L) dx \wedge dy \right\rangle$$

où

$$J(f, L) = \sum_1^n a_i \partial_{x_i} f + \partial_y f$$

est le jacobien de l'application  $(x, y) \rightarrow (f, L_1, \dots, L_n)(x, y)$ . Puisque les fonctions  $(f, L_1, \dots, L_n)$  définissent une intersection complète et ont un nombre fini

de zéros communs (dépendant holomorphiquement des paramètres  $(a, b)$ ) et que la fonction  $h$  est holomorphe, ce calcul de résidu global coïncide avec celui du résidu global de Grothendieck et on notera plus symboliquement

$$\mathrm{Tr}_V \left( \frac{h}{g} \right) = \mathrm{Res} \left[ \frac{\frac{h}{g} J(f, L) dx \wedge dy}{f, L_1, \dots, L_n} \right]. \quad (\dagger)$$

**2. Le cas où  $\Phi$  est une forme méromorphe de degré maximal sur  $V$**

Puisque  $V$  ne contient pas la droite verticale  $x = 0$ , la fonction  $\partial_y f$  n'est pas identiquement nulle sur  $V$  et l'on peut se ramener au cas où  $\Phi$  se présente sous la forme  $\Phi = m(x, y)dx$ ,  $m$  étant une fonction méromorphe sur  $V$ . Dans ce cas, on fait agir le courant  $T$  sur des formes-test de  $D \times D^*$  de bidegré  $(n, 2n)$  (en les variables  $(a, b)$  ici) et on a alors l'expression suivante pour la forme trace  $\mathrm{Tr}_V(\Phi)$  :

$$\mathrm{Tr}_V(mdx) = \sum_{k=0}^n \mathrm{Res} \left[ \frac{m y^k \partial_y f dx \wedge dy}{f, L_1, \dots, L_n} \right] \left( \sum_{|I|=k, |J|=n-k, I \cap J = \emptyset} \pm da_I \wedge db_J \right) \quad (\dagger\dagger)$$

où  $I$  et  $J$  désignent des multi-indices ordonnés de  $\{1, \dots, n\}$ ,  $|I|$  et  $|J|$  leurs cardinaux, et

$$da_I \wedge db_J := \bigwedge_{l=1}^k da_{i_l} \wedge \bigwedge_{l'=1}^{n-k} db_{j_{l'}}$$

si  $I = \{i_1, \dots, i_k\}$  et  $J = \{j_1, \dots, j_{n-k}\}$ .

**Remarque 1** On retrouve ici une formule prouvée par P.A. Griffiths dans [7] mais l'écriture  $(\dagger\dagger)$  grâce au formalisme du calcul résiduel met en évidence le fait que l'on n'ait pas à se soucier du fait que  $V$  soit lisse ou non au voisinage des points d'intersection avec les droites correspondant aux points de  $D^*$ .

**Remarque 2** A priori,  $V$  n'est pas donné comme le lieu d'annulation d'une seule fonction. Par contre, si  $V$  est un germe d'ensemble analytique en un point  $(0, y_0)$  de la droite verticale distinct du point à l'infini, on a alors, en coordonnées affines  $(x, y)$  dans  $D$  au voisinage de  $(0, y_0)$ ,  $V = \{f = 0\}$  pour un germe de fonction holomorphe  $f$  et les formules  $(\dagger)$  ou  $(\dagger\dagger)$  s'appliquent à condition d'introduire au numérateur des symboles résiduels une fonction plateau valant identiquement 1 dans un voisinage suffisamment petit de  $(0, y_0)$ . La trace est alors un germe de forme méromorphe en  $(a, b) = (0, 0)$ .

Un outil majeur du calcul résiduel est le théorème de dualité : si  $D \subset \mathbb{C}^{n+1}$  est un domaine d'holomorphie,  $(f_1, \dots, f_k)$  une intersection complète dans  $D$

et  $g$  une fonction holomorphe dans  $D$  telle que  $\text{codim}\{g = 0\} \cap \{f_1 = \dots = f_k = 0\} > k$ , une fonction  $h$  holomorphe dans  $D$  est dans l'idéal engendré par les  $f_i$  si et seulement si le courant résiduel

$$h \left[ \frac{1}{g} \right] \bar{\partial} \left( \frac{1}{f_1} \right) \wedge \dots \wedge \bar{\partial} \left( \frac{1}{f_k} \right)$$

est nul sur l'espace des formes test de type  $(n+1-k, n+1-k)$   $\bar{\partial}$ -fermées au voisinage de  $\{f_1 = \dots = f_k = 0\}$ . Ce théorème s'applique notamment dans les anneaux locaux des germes de fonctions holomorphes. Le pendant algébrique de ce résultat (dans le cadre élémentaire du calcul résiduel en une variables) est une conséquence immédiate de l'algorithme de division euclidienne : si  $F \in \mathbb{C}[Y]$ , un polynôme  $H$  de  $\mathbb{C}[Y]$  est divisible par  $F$  si et seulement si

$$\text{Res} \left[ \frac{Y^k H dY}{F} \right] = 0, \quad \forall k = 0, \dots, \deg F - 1.$$

### 3 Construction du couple $(F, H)$ et nouvelle écriture de la trace

Nous allons dans ce paragraphe établir une formule analogue à  $(\dagger\dagger)$  dans le cas où  $V$  est une réunion finie de germes d'hypersurfaces analytiques irréductibles coupés (mais non inclus) par une droite que l'on supposera être la droite verticale. Cette formule fera encore intervenir des résidus globaux de fractions rationnelles en une variable et l'on esquivera ainsi le recours aux fonctions plateau, ce qui fournira une expression différente de la trace  $\text{Tr}_V[mdx]$ , dépendant du *degré vertical* de  $V$  (c'est-à-dire du nombre de points d'intersection de  $V$  avec une droite générique  $L_{(a,b)}$  pour  $(a,b)$  voisin de  $(0,0)$ ). On montrera pour cela l'équivalence, à degré vertical  $d$  précisé, de la donnée du couple  $(V, \Phi)$  avec un couple de polynômes  $(F, H)$  à une variable de degrés respectifs  $d$  et  $d-1$  et à coefficients dans le corps des germes de fonctions méromorphes en  $(a,b)$  à l'origine de  $\mathbb{C}^{2n}$ .

On notera  $\mathcal{O}$  l'anneau factoriel (resp.  $\mathcal{M}$  le corps) des germes de fonctions holomorphes (resp. méromorphes) à l'origine  $(a,b) = (0,0)$  de  $\mathbb{C}^{2n}$ .

L'aboutissement de ce paragraphe est de caractériser "le plus algébriquement possible" à quelle condition un germe de forme méromorphe en un point de la grassmannienne  $G(n+1, 1)$  (correspondant par exemple à la droite  $x = 0$ )

est la trace d'un germe de  $n$ -forme méromorphe sur un "cycle de germes d'hypersurfaces analytiques" de "degré vertical ensembliste" donné (on expliquera plus loin ce vocabulaire). Donnons tout d'abord deux définitions dans un contexte plus général que celui des sous-variétés linéaires, ce en vue de généralisations ultérieures de ce travail.

**Définition 1** Soit  $A$  une sous-variété algébrique de  $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$  de codimension pure  $p$ . On appelle germe de cycle analytique effectif intersectant proprement  $A$  toute combinaison formelle à coefficients entiers positifs et finie de germes  $\gamma$  d'espaces analytiques irréductibles de dimension  $p$  en des points de  $A$  avec  $\dim(\text{supp}(\gamma) \cap A) = 0$ . On note  $\mathcal{V}_A$  l'ensemble des germes de cycles analytiques intersectant proprement  $A$ . Tout élément  $V$  de  $\mathcal{V}_A$  peut se décomposer sous la forme  $V = \sum_{P \in A} V_P$  où  $V_P = \sum_i k_i V_{P,i}$  et les  $V_{P,i}$  sont des germes d'ensembles analytiques irréductibles en  $P \in A$  (en nombre fini), les points  $P$  à considérer étant aussi en nombre fini. On note  $|V|$  l'ensemble analytique  $\bigcup_{P,i} V_{P,i}$  que l'on appelle le support de  $V$ .

**Définition 2** Si  $V = \sum_{P \in A} V_P$  et  $q \in \{0, \dots, n\}$ , on note  $M^q(|V|)$  l'ensemble des  $(q, 0)$ -formes méromorphes sur  $|V|$ . Se donner une telle forme est équivalent à se donner un germe de forme méromorphe  $\Phi_P$  sur chaque  $|V_P|$ , c'est-à-dire un germe de forme méromorphe dans l'espace  $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$  au voisinage de chaque point  $P$  de  $A \cap |V|$ .

On s'intéresse ici au cas où  $A$  est la droite verticale  $\Delta = L_{(0,0)} : x = 0$ . On notera  $\mathcal{V}$  le sous-ensemble de  $\mathcal{V}_\Delta$  constitué des combinaisons de germes d'hypersurface en des points  $P = (0, y_P)$  de  $\Delta$  distincts du point à l'infini de cette droite.

Soit  $V$  un germe d'hypersurface analytique irréductible en un point  $P = (0, y_P) \in \Delta$  intersectant proprement  $\Delta$  en ce point. Dans ce cas,  $V = \{f = 0\}$  où  $f \in \mathbb{C}\{x, y - y_P\}$  est un germe de fonction holomorphe réduit en  $P$  (vérifiant donc  $(\text{rad}(f)) = (f)$ ). Par hypothèse, la fonction  $f(0, y)$  n'est pas identiquement nulle et on note  $d$  son ordre d'annulation en  $y = y_P$ . Par continuité,  $d$  est aussi le nombre de zéros de la fonction holomorphe  $y \rightarrow f(x, y)$  pour  $x$  voisin de zéro. On appellera  $d = \deg(V)$  le *degré vertical* de  $V$ . Le degré vertical d'un cycle  $V = k_1 V_1 + \dots + k_s V_s$  sera alors par définition  $\deg(V) = k_1 \deg(V_1) + \dots + k_s \deg(V_s)$ . L'ensemble  $\mathcal{V}$  a naturellement une structure de semi-groupe gradué avec la graduation par le degré vertical (on rajoute l'ensemble vide de degré 0 pour avoir un élément neutre). Tout



élément admet une décomposition unique en somme d'éléments irréductibles.

**Remarque 3** Si  $V$  est un germe en un point  $P \in \Delta$ , l'entier  $d$  est le degré du revêtement analytique  $(V, \pi, I)$  où  $I$  est un ouvert suffisamment petit de  $\mathbb{C}^n$  centré en  $x = 0$  et  $\pi$  est la projection verticale  $(x, y) \rightarrow x$ . Notons que  $d$  n'est pas forcément le degré global de  $V$  car il peut varier d'une projection à l'autre, la projection choisie ne correspondant pas nécessairement à une projection générique : par exemple le degré vertical du germe en 0 de l'ensemble  $V = \{y^2 - x^3 = 0\}$  est 2 alors que le degré de  $V$  est 3 pour une projection générique.

Quand on parle d'une équation  $\{f = 0\}$  d'un germe  $V$ , on suppose que l'écriture de  $f$  prend en compte les multiplicités de chacune des branches de  $V$ .

**Remarque 4** La définition de la trace avec multiplicité (*i.e.* la fonction  $f$  n'est pas forcément réduite) grâce aux formules (†) ou (††) revient à la définition usuelle :

$$\mathrm{Tr}_{k_1 V_1 + \dots + k_s V_s}(\Phi) = \mathrm{Tr}_{V_1 + \dots + V_s}(\Phi')$$

où  $\Phi'$  est la forme méromorphe sur  $|V|$  valant  $k_i \Phi$  sur  $V_i$ . C'est seulement dans la construction de  $F$  (rendant compte de  $V$ ) que l'on fera entrer en jeu les multiplicités impliquées dans la définition de  $V$ . On se restreindra ensuite aux ensembles  $M(|V|)$  (resp.  $M^n(|V|)$ ) des fonctions (resp. des  $n$ -formes) méromorphes sur  $|V|$  pour construire  $H$ .

On se ramène dans un premier temps au calcul résiduel algébrique en une variable grâce au théorème de préparation de Weierstrass. Soit  $V = \{f = 0\} \in \mathcal{V}$  un germe irréductible en un point  $P \in \Delta$ , de degré vertical  $d$ . Soit  $\tilde{f}(y, a, b) = f(ay + b, y) \in \mathcal{O}\{y - y_P\}$ . La fonction  $\tilde{f}$  est irréductible et régulière de degré  $d$  en  $y = y_P$ . Par le théorème de préparation de Weierstrass, il existe un unique polynôme irréductible  $Q \in \mathcal{O}[Y]$  de degré  $d$  et une fonction analytique  $u \in \mathcal{O}\{y - y_P\}$  inversible tels que :

$$\tilde{f}(y, a, b) = Q(y, a, b)u(y, a, b)$$

avec  $Q(y, 0, 0) = (y - y_P)^d$  et  $u(y_P, 0, 0) \neq 0$ . On a alors le lemme suivant, permettant précisément de nous ramener au calcul résiduel en une variable :

**Lemme 1** Soit  $V = \{f = 0\} \in \mathcal{V}$  un germe irréductible de degré vertical  $d$  et  $Q$  le polynôme irréductible de  $\mathcal{O}[Y]$  défini ci-dessus. Soit  $h \in M(|V|)$  un germe de fonction méromorphe sur  $|V|$  (c'est-à-dire un germe de fonction méromorphe au point  $(0, y_P)$  de  $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ ) ; on a alors

$$\mathrm{Tr}_V(h) = \mathrm{Res} \left[ \frac{h(ay + b, y) \partial_y Q(y, a, b) dy}{Q(y, a, b)} \right].$$

**Preuve.** On introduit une fonction plateau  $\theta$  valant 1 au voisinage de  $V$ . Ainsi, par  $(\dagger)$  et au vu de la remarque 2, l'expression de la trace devient, si  $J(f, L) := J(f, L_1, \dots, L_n)$ ,

$$\mathrm{Tr}_V(h) = \mathrm{Res} \left[ \frac{\theta(x, y) h(x, y) J(f, L) dy \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n}{f, x_1 - a_1 y - b_1, \dots, x_n - a_n y - b_n} \right]$$

On remarque que la fonction de  $(x, y, a, b)$

$$(x, y, a, b) \rightarrow \theta h J(f, L)(x, y, a, b) - \theta h J(f, L)(ay + b, y, a, b)$$

s'écrit comme combinaison linéaire des  $L_1, \dots, L_n$  à coefficients semi-méromorphes en  $(0, y_P, 0, 0)$ , le lieu polaire de ces coefficients ne contenant pas la droite  $x - ay - b = 0$  pour  $a, b$  génériques au voisinage de  $(0, 0)$ . En dehors du lieu polaire de  $h$ , le théorème de dualité s'applique ; ainsi sur l'ouvert constitué des  $(a, b)$  pour lesquels la droite  $L(a, b)$  ne passe pas par l'ensemble fini des points communs à  $V$  et au lieu polaire de  $h$ , on a l'égalité

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_V(h) &= \mathrm{Res} \left[ \frac{\theta h(x, y) J(f, L)(x, y, a, b) dy \wedge dx}{f, L_1, \dots, L_n} \right] \\ &= \mathrm{Res} \left[ \frac{\theta(ay + b, y) h(ay + b, y) J(f, L)(ay + b, y, a, b) dy \wedge dx}{f(ay + b, y), L_1, \dots, L_n} \right], \end{aligned}$$

d'où l'on déduit l'égalité dans  $\mathcal{M}$ . Cette expression nous permet de nous libérer des variables  $x$  et d'exprimer la trace comme un calcul de résidu de forme méromorphe en une variable  $y$ , à savoir

$$\mathrm{Tr}_V(h) = \mathrm{Res} \left[ \frac{\theta(ay + b, y) h(ay + b, y) J(f, L_1, \dots, L_n)(ay + b, y, a, b) dy}{f(ay + b, y)} \right]$$

Un rapide calcul montre que l'on a l'égalité suivante :

$$J(f, L_1, \dots, L_n)(ay + b, y, a, b) = \left( \sum_{i=1}^n a_i \partial_{x_i} f + \partial_y f \right)(y, a, b) = \partial_y \tilde{f}(y, a, b) ;$$

puisque  $\tilde{f}(y, a, b) = Q(y, a, b)u(y, a, b)$ , on a

$$\begin{aligned} \text{Tr}_V(h) &= \text{Res} \left[ \frac{\theta(ay + b, y) h(ay + b, y) \partial_y \tilde{f}(y, a, b) dy}{\tilde{f}(y, a, b)} \right] \\ &= \text{Res} \left[ \frac{\theta(ay + b, y) h(ay + b, y) \partial_y Q dy}{Q(y)} \right] + \\ &\quad \text{Res} \left[ \frac{\theta(ay + b, y) h(ay + b, y) \partial_y u dy}{u} \right] ; \end{aligned}$$

la fonction  $u$  étant inversible sur le support de  $y \rightarrow p(ay + b, y)$ , le deuxième terme de la somme de droite est nul ; de plus les zéros de  $Q$  étant localisés au voisinage de l'origine, la fonction plateau devient inutile dans le premier terme de la somme de droite, ce qui fournit la formule souhaitée pour la trace  $\text{Tr}_V(h)$ .  $\square$

Si maintenant  $V = V_1 + \dots + V_k \in \mathcal{V}$  est une somme de germes irréductibles  $V_i = \{f_i(x, y) = 0\}$  distincts deux à deux, on définit les fonctions  $Q_i \in \mathcal{O}[Y]$  associées aux  $f_i$  comme précédemment et, en posant  $Q = Q_1 \dots Q_k$ , on obtient :

$$\text{Tr}_V(y^k) = \sum_i \text{Res} \left[ \frac{y^k \partial_y Q_i dy}{Q_i} \right] = \text{Res} \left[ \frac{y^k \partial_y Q dy}{Q} \right] .$$

On notera  $u_k$  ces fonctions de  $(a, b)$  qui sont des germes de fonctions holomorphes par le théorème d'Abel. On remarque que  $u_0$  est le degré de  $Q$  qui est aussi le degré vertical  $d$  de  $V$ . On a alors le deuxième lemme crucial dans l'exposé :

**Lemme 2** *La matrice  $d \times d$  suivante  $U$  à coefficients dans  $\mathcal{M}$*

$$A = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_{d-1} \\ u_1 & u_2 & \dots & u_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{d-1} & u_d & \dots & u_{2d-2} \end{pmatrix}$$

*est non dégénérée sur le corps  $\mathcal{M}$ . Plus précisément, on a*

$$\text{Det } A(a, b) = \text{Disc } Q(a, b)$$

*où  $\text{Disc } Q$  est le discriminant de  $Q$ .*

**Preuve.** Dans un premier temps, il suffit de montrer que le noyau de l'endomorphisme  $U$  associé à cette matrice est nul. Soit

$$\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_{d-1}) \in \mathcal{M}^d$$

un  $d$ -uplet d'éléments de  $\mathcal{M}$  tel que  $U(\sigma) = 0$ . En terme de calcul résiduel, cette condition se traduit par

$$\text{Res} \left[ \frac{Y^k(\sigma_{d-1}Y^{d-1} + \dots + \sigma_1Y + \sigma_0) \partial_y Q(Y, a, b) dY}{Q(Y, a, b)} \right] = 0, \quad k = 0, \dots, d-1$$

ce qui par le théorème de dualité se traduit par l'appartenance du polynôme  $(\sigma_{d-1}Y^{d-1} + \dots + \sigma_1Y + \sigma_0) \partial_y Q$  à l'idéal engendré par  $Q$  dans  $\mathcal{M}[Y]$ . Puisque  $Q$  est sans facteurs multiples et pour une raison de degré, on voit par le lemme de Gauss que l'unique solution est  $\sigma = (0, \dots, 0)$ , ce qui prouve la première partie du lemme. On voit par ce biais que  $\text{Det } A(a_0, b_0) = 0$  est équivalent au fait que les polynômes  $\partial_y Q(Y, a_0, b_0)$  et  $Q(Y, a_0, b_0)$  ont une racine commune (pour  $(a, b) = (a_0, b_0)$  fixés). En fait, pour  $(a, b)$  générique, le polynôme  $Q$  a  $d$  racines  $y_1(a, b), \dots, y_d(a, b)$  distinctes. Il suffit alors de remarquer que  $A = S^t S$  où  $S = (y_i^j)_{0 \leq i, j \leq d-1}$  est la matrice de Vandermonde des racines de  $Q$  ce qui montre la deuxième partie du lemme.  $\square$

**Remarque 5** On a privilégié la démonstration du lemme par le théorème de dualité qui est une approche plus globale (on ne travaille pas génériquement) qui s'adapte pour des situations plus compliquées. Quelle que soit l'approche, on comprend bien que les droites  $L(a, b)$  pour lesquelles  $\text{Det } A(a, b) = 0$  sont exactement les droites pour lesquelles  $f(ay + b, y)$  a une racine double : ce sont les “mauvaises” droites, c'est à dire celles qui passent par le lieu singulier de  $V$  ou qui sont tangentes à  $V$ .

On note  $\mathcal{U}[Y]$  le sous-ensemble de  $\mathcal{O}[Y]$  constitué des polynômes unitaires vérifiant les  $n$  relations

$$\partial_{a_i} F - Y \partial_{b_i} F \in (F), \quad i = 1, \dots, n \quad (*)$$

**Lemme 3** *L'ensemble  $\mathcal{U}[Y]$  admet une structure de semi-groupe (multiplicatif) gradué avec la graduation naturelle qui de plus hérite de la factorialité de l'anneau  $\mathcal{O}[Y]$ .*

**Preuve.** Si  $F_1$  et  $F_2$  sont deux facteurs de  $F$  vérifiant

$$\partial_{a_i} F_j - Y \partial_{b_i} F_j \in (F_j) \quad j = 1, 2,$$

on a alors

$$\begin{aligned} \partial_{a_i}(F_1 F_2) - Y \partial_{b_i}(F_1 F_2) &= F_2(\partial_{a_i} F_1 - Y \partial_{b_i} F_1) + F_1(\partial_{a_i} F_2 - Y \partial_{b_i} F_2) \\ &\in (F_1 F_2), \end{aligned}$$

et ce pour tout  $i = 1, \dots, n$ . La propriété (\*) est donc compatible avec la multiplication, ce qui donne à  $\mathcal{U}[Y]$  une structure de semi-groupe (multiplicatif) gradué avec la graduation naturelle. Il reste à montrer la factorialité. Soit  $F \in \mathcal{U}[Y]$  et soit  $F = F_1^{k_1} \dots F_s^{k_s}$  sa décomposition dans l'anneau factoriel  $\mathcal{O}[Y]$ . Il suffit de montrer que tout facteur irréductible  $F_i$  de  $F$  vérifie (\*); on le montre pour  $F_1$ ; le polynôme  $F$  se factorise en  $F = F_1^{k_1} P$  où  $k_1 \in \mathbb{N}^*$  et  $P$  est premier avec  $F_1$  et l'on a

$$\begin{aligned} \partial_{a_i} F - Y \partial_{b_i} F &= F_1^{k_1}(\partial_{a_i} P - Y \partial_{b_i} P) + k F_1^{k_1-1} P(\partial_{a_i} F_1 - Y \partial_{b_i} F_1) \\ &\in (F_1^{k_1} P); \end{aligned}$$

ceci implique  $k_1 F_1^{k_1-1} P(\partial_{a_i} F_1 - Y \partial_{b_i} F_1) \in (F_1^{k_1})$  et ce pour tout  $i$ . Or,  $P$  est premier avec  $F_1$  par hypothèse et on a donc  $\partial_{a_i} F_1 - Y \partial_{b_i} F_1 \in (F_1)$ , ce qui achève la preuve du lemme 3.  $\square$

**Proposition 1** *Il existe un isomorphisme  $\Pi$  de semi-groupes gradués entre les ensembles  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{U}[Y]$ ; les branches irréductibles de  $V$ , leur degré vertical et leur multiplicité sont respectivement en correspondance avec les facteurs irréductibles de  $F$ , leur degré et leur multiplicité dans la décomposition de  $F$  dans l'anneau factoriel  $\mathcal{O}[Y]$ .*

**Preuve.** Il suffit de construire l'image d'un seul germe irréductible et l'image réciproque d'un polynôme irréductible, puis de montrer que  $\Pi$  est un homomorphisme de semi-groupes gradués. Soit donc  $V$  un tel élément de  $\mathcal{V}$  de degré vertical  $d$ . L'image de  $V$  par  $\Pi$  sera par définition

$$F := \Pi(V) = Y^d - \sigma_{d-1} Y^{d-1} + \dots + (-1)^{d-1} \sigma_0,$$

où  $(\sigma_{d-1}, \dots, \sigma_0) \in \mathcal{M}^d$  est l'unique solution du système linéaire (S) de  $d$  équations à  $d$  inconnues

$$\begin{array}{ccccccc} u_{d-1} \sigma_{d-1} & + & \cdots & + & (-1)^{d-1} u_0 \sigma_0 & = & u_d \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ u_{2d-2} \sigma_{d-1} & + & \cdots & + & (-1)^{d-1} u_{d-1} \sigma_0 & = & u_{2d-1} \end{array}$$

qui est un système de Cramer d'après le lemme 2. Le fait que  $\sigma$  soit solution de ce système de Cramer est équivalent à ce que le polynôme  $F$  construit ci-dessus à partir de  $\sigma$  vérifie

$$\text{Res} \begin{bmatrix} y^k F \partial_y Q dy \\ Q \end{bmatrix} = 0, \quad k = 0, \dots, d-1.$$

Par le théorème de dualité on a donc  $F \partial_y Q \in (Q)$ . Ici,  $Q$  est irréductible et unitaire par hypothèse, on a donc  $Q = F$  pour des raisons de degré. L'unique solution du système de Cramer ( $S$ ) fournit donc le polynôme de Weierstrass  $Q \in \mathcal{O}[Y]$  associé à la fonction  $\tilde{f}$ . Par définition même de  $\tilde{f}$ , on a pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,

$$0 = \partial_{a_i} \tilde{f} - Y \partial_{b_i} \tilde{f} = u(\partial_{a_i} F - Y \partial_{b_i} F) + F(\partial_{a_i} u - Y \partial_{b_i} u)$$

et  $F$  divise  $\partial_{a_i} F - Y \partial_{b_i} F$  dans  $\mathcal{O}[Y]$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ , ce qui montre que le polynôme  $F$  appartient à  $\mathcal{U}[Y]$ . De plus, par construction même de  $Q$ ,  $\Pi$  est un homomorphisme de semi-groupes gradués entre  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{U}[Y]$ .

Prouvons maintenant la *surjectivité* de  $\Pi$ . Il suffit de montrer que tout polynôme irréductible de  $\mathcal{U}[Y]$  s'écrit  $\Pi(V)$  où  $V \in \mathcal{V}$ . Soit  $F \in \mathcal{U}[Y]$  un polynôme irréductible de degré  $d$ . Du fait de l'irréductibilité de  $F$ , le polynôme  $F(Y, 0, 0)$  ne peut avoir qu'une seule racine  $y_P$  et s'écrit donc  $F(Y, 0, 0) = (Y - y_P)^d$ . On considère alors la fonction  $(x, y, a) \rightarrow G(x, y, a) := F(y, a, x - ay)$  qui, vue comme un élément de  $\mathbb{C}\{x, y - y_P, a\}$ , est régulière de degré  $d$  en  $y = y_P$ . Puisque  $F$  est dans  $\mathcal{U}[Y]$ , donc vérifie (\*) et est unitaire, la fonction  $G$  appartient à l'idéal engendré par  $\partial_{a_i} G$  dans  $\mathbb{C}\{x, y, a\}$ ; or l'ordre d'annulation en  $a_j = 0$  de la fonction  $a_j \rightarrow G(x, y, a)$  est donné par l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{|a_j|=\epsilon} \frac{\partial_{a_j} G(x, y, a)}{G(x, y, a)} da_j$$

(pour  $\epsilon$  assez petit) et vaut zéro pour tout  $(x, y)$  voisin de  $(0, y_P)$  puisque la fonction sous l'intégrale est holomorphe pour  $\epsilon$  suffisamment petit. Par utilisations successives du théorème de préparation de Weierstrass (on élimine les variables  $a_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  les unes après les autres), on montre alors l'existence d'un germe de fonction holomorphe unique (à inversible près)  $f \in \mathbb{C}\{x, y - y_P\}$  s'annulant en  $(0, y_P)$  et d'un germe de fonction holomorphe inversible  $q \in \mathbb{C}\{x, y - y_P, a\}$  tels que

$$G(x, y, a) = f(x, y)q(x, y, a),$$

où  $f$  est régulière de degré  $d$  au point  $(0, y_P)$ . On a alors

$$\tilde{f}(y, a, b) = G(ay + b, y, a)q^{-1}(ay + b, y, a) = F(y, a, b)q^{-1}(ay + b, y, a)$$

Il suffit de poser  $V = \{f = 0\}$  et  $V$  est alors un germe d'ensemble analytique en  $P = (0, y_P) \in \Delta \setminus H_\infty$  tel que  $F = \Pi(V)$ . Ce germe est irréductible sinon  $F$  serait réductible.

Prouvons maintenant l'*injectivité* de  $\Pi$ . Grâce à la factorialité de  $\mathcal{U}[Y]$ , on se ramène à montrer l'injectivité pour des germes irréductibles. Soient  $V_1 = \{f_1 = 0\}$  et  $V_2 = \{f_2 = 0\}$  deux germes analytiques irréductibles en deux points  $P_1 = (0, y_{P_1})$  et  $P_2 = (0, y_{P_2})$  de  $\Delta \setminus H_\infty$  tels que  $\Pi(V_1) = \Pi(V_2) = F$ . Dans ce cas on a  $\tilde{f}_1(y, a, b) = F(y, a, b)u_1(y, a, b)$  dans  $\mathcal{O}\{y - y_{P_1}\}$  et  $\tilde{f}_2(y, a, b) = F(y, a, b)u_2(y, a, b)$  dans  $\mathcal{O}\{y - y_{P_2}\}$ . Puisque  $F$  est irréductible dans  $\mathcal{U}[Y]$ ,  $F(y, 0, 0) = (y - y_0)^d$ , ce qui montre que  $P_1 = P_2$ ; ainsi les deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$  sont définies au voisinage d'un même point et sont égales à un inversible près; par conséquent  $f_1(x, y)$  et  $f_2(x, y)$  également. On a donc bien  $V_1 = V_2$ .

La proposition 1 est ainsi démontrée.  $\square$

**Remarque 6** On peut noter que si  $\{f = 0\}$  est l'équation de  $V$  (les multiplicités étant prises en compte), les coefficients de  $F = \Pi(V)$  sont les fonctions symétriques élémentaires en les racines de  $y \rightarrow \tilde{f}(y, a, b)$  et peuvent s'exprimer grâce aux formules de Newton comme des polynômes en les polynômes symétriques de Newton des racines que sont les  $u_i$  pour  $i = 0, \dots, d$ . Il n'était donc pas nécessaire d'utiliser le système de Cramer ( $S$ ) pour démontrer la proposition mais l'utilité de ce type de construction apparaîtra par la suite.

**Remarque 7** Le fait que l'ensemble analytique  $V$  contienne la droite verticale  $\{x = 0\}$  équivaut au fait que la fonction holomorphe  $f$  soit dans l'idéal engendré par les  $x_i$ . Le polynôme  $F$  alors obtenu serait dans l'idéal engendré par les polynômes  $Y + b_i/a_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ; ce polynôme vérifie toujours (\*) mais ses coefficients ne sont plus holomorphes et n'ont plus de signification en  $(a, b) = (0, 0)$ ; ceci s'explique du fait que la droite  $(a, b) = (0, 0)$  est incluse dans  $V$ . Même si ce cas s'avère pathologique, on peut par contre montrer, d'une manière générale, que le lieu polaire (dans  $(\mathbb{C}^{2n}, 0)$ ) des coefficients d'un élément de  $\mathcal{M}[Y]$  vérifiant les conditions (\*) ne dépend en fait pas de  $b$ .

On travaille maintenant ensemblistement, *i.e.* sur l'ensemble  $\mathcal{V}_{\text{red}}$  constitué des éléments  $V = V_1 + \cdots + V_k \in \mathcal{V}$ , où les  $V_i$  sont deux à deux distincts (et  $F = \Pi(V)$  n'a pas de facteurs multiples).

**Proposition 2** *Soit  $V \in \mathcal{V}_{\text{red}}$  de degré vertical  $d$  et  $F = \Pi(V)$ . Il existe une application bijective*

$$\rho : \mathcal{M}(V) \rightarrow \mathcal{M}_F[Y]$$

*entre l'ensemble  $\mathcal{M}(V)$  des germes de fonctions méromorphes sur  $V$  et le sous-ensemble  $\mathcal{M}_F[Y]$  de  $\mathcal{M}[Y]$  constitué des polynômes  $H$  de degré  $d-1$  à coefficients dans  $\mathcal{M}$  vérifiant la relation*

$$\partial_{a_i} H - Y \partial_{b_i} H \in (F) \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (**)$$

**Preuve.** La preuve se fait en deux étapes : nous traitons tout d'abord le cas d'un germe irréductible  $V$  (en un point  $(0, y_P)$ ), puis le cas général.

*Le cas d'un germe irréductible.* Soit  $V$  un germe d'équation (réduite)  $V = \{f = 0\}$  de degré vertical  $d$  et  $F = \Pi(V)$ . Soit  $h$  un germe de fonction méromorphe sur  $V$ ,  $h \in \mathcal{M}(V)$ . La construction de  $\rho$  est analogue à celle de  $\Pi$  mais on considère cette fois le système  $(S_h)$  de  $d$  équations à  $d$  inconnues suivant (les  $\tau_i$  sont les inconnues) :

$$\begin{array}{ccccccc} u_0 \tau_0 & + & \cdots & + & u_{d-1} \tau_{d-1} & = & v_0 \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ u_{d-1} \tau_0 & + & \cdots & + & u_{2d-2} \tau_{d-1} & = & v_{d-1} \end{array}$$

avec cette fois les  $v_k$  (ce sont des éléments de  $\mathcal{M}$  d'après le théorème d'Abel) définis par

$$v_k := \text{Tr}_V (y^k h) = \text{Res} \left[ \frac{y^k h(ay + b, y) \partial_y F dy}{F(y, a, b)} \right], \quad k = 0, \dots, d-1.$$

Soit  $\tau := (\tau_0, \dots, \tau_{d-1})$  l'unique  $d$ -uplet solution du système (qui est de Cramer d'après le lemme 2), qui cette fois est *a priori* un vecteur de germes de fonctions méromorphes en  $(a, b)$  à l'origine de  $\mathbb{C}^{2n}$ . On pose alors

$$H(Y, a, b) = \tau_{d-1}(a, b) Y^{d-1} + \cdots + \tau_1(a, b) Y + \tau_0(a, b).$$



Par construction même, on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left[ \frac{H(y, a, b) y^k \partial_y F(y, a, b) dy}{F(y, a, b)} \right] &= \sum_0^{d-1} \tau_i \operatorname{Res} \left[ \frac{y^{k+i} \partial_y F(y, a, b) dy}{F(y, a, b)} \right] \\ &= \sum_0^{d-1} \tau_i u_{k+i} = v_k \end{aligned}$$

pour  $k = 0, \dots, d-1$ . Ainsi,

$$\operatorname{Res} \left[ \frac{y^k h(ay + b, y) \partial_y F dy}{F(y, a, b)} \right] = \operatorname{Res} \left[ \frac{H(y, a, b) y^k \partial_y F(y, a, b) dy}{F(y, a, b)} \right]$$

pour tout  $k = 0, \dots, d-1$ . Puisque  $d = \deg_Y F$ , on en déduit que ceci est en fait vrai pour tout entier  $k$  en effectuant la division euclidienne de  $y^k$  par  $F$  et en utilisant le théorème de dualité. Ainsi l'égalité reste vraie si on multiplie les deux numérateurs par un élément quelconque de  $\mathcal{O}\{y - y_P\}$ . Or, comme  $h$  est la restriction à  $|V|$  d'un germe de forme méromorphe au voisinage de  $(0, y_P)$  dans  $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ ,  $h$  admet un dénominateur  $(x, y) \rightarrow \xi(x, y)$  (d'ailleurs puissance d'un dénominateur universel  $\delta$  ne dépendant que de  $V$  d'après le théorème d'Oka) qui est un germe de fonction holomorphe au voisinage de  $(0, y_P)$ ; si l'on pose  $r(y, a, b) = \xi(ay + b, y)$ , il résulte des égalités entre symboles résiduels ci-dessus (pensées dans  $\mathcal{M}\{y - y_P\}$ ) et du théorème de dualité que  $(y, a, b) \rightarrow r(y, a, b)(H(y, a, b) - h(ay + b, y))\partial_y F$  est dans l'idéal engendré par  $F$  dans  $\mathcal{O}\{y - y_P\}$ ; on en déduit (car  $F$  est irréductible par hypothèse) qu'en tant qu'élément de  $\mathcal{M}\{y - y_P\}$ ,  $H$  s'écrit

$$(y, a, b) \rightarrow H(y, a, b) = h(ay + b, y) + \frac{q(y, a, b)}{r(y, a, b)} F(y, a, b) \quad (\dagger^3)$$

et puisque les fonctions  $(\partial_{a_i} - y\partial_{b_i})(r)$  et  $(\partial_{a_i} - y\partial_{b_i})(h(ay + b, y))$  pour  $i = 1, \dots, n$  sont identiquement nulles et que  $F$  vérifie (\*), le polynôme  $\partial_{a_i} H - y\partial_{b_i} H$  est donc dans l'idéal engendré par  $F$  dans  $\mathcal{O}\{y - y_P\}$ ; il en résulte que  $H$  vérifie le jeu d'équations (\*\*) et est donc dans  $\mathcal{M}_F[Y]$ . Cette construction nous permet donc d'associer à  $h$  un élément  $\rho(h)$  de  $\mathcal{M}_F[Y]$ .

L'injectivité de  $\rho$  résulte de la remarque évidente suivante : d'après  $(\dagger^3)$ , la restriction à  $V$  de  $(x, y) \rightarrow H(y, a, x - ay)$  (considéré comme germe d'une fonction de  $x, y$  au voisinage de  $(0, y_P)$ ) lorsque  $a$  est fixé génériquement et voisin de 0 est égale à  $h$ .

Prouvons maintenant la surjectivité de  $\rho$ . Soit  $H \in \mathcal{M}_F[Y]$ . Puisque  $H$  vérifie les conditions (\*\*) et que  $F$  est unitaire, on a

$$\partial_{a_i} H - Y\partial_{b_i} H = q_i(a, b)F(Y, a, b)$$

avec  $q_i = -\partial_{b_i} \gamma_{d-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$  ; ainsi

$$\begin{aligned} \partial_{a_i}[H(y, a, x - ay)] &= q_i(a, x - ay)F(y, a, x - ay) \\ &= q_i(a, x - ay)u(a, x, y)f(x, y) \end{aligned}$$

où  $u$  est inversible et  $V = \{f = 0\}$ . Le lieu polaire de la fonction méromorphe  $(x, y) \rightarrow q_i(a, x - ay)$  ne contient aucune branche de  $V$ , sinon  $q_i(a, b)$  serait divisible (dans  $\mathcal{M}[Y]$ ) par un facteur de  $F(Y, a, b)$ , ce qui est absurde. On peut donc restreindre à  $V$  les deux membres de cette dernière égalité, ce qui donne :

$$\partial_{a_i}[H(y, a, x - ay)]|_V = \partial_{a_i}[H(y, a, x - ay)|_V] = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

la première de ces égalités étant une conséquence du fait que l'équation de  $V$  ne dépende pas de  $a$ . La fonction  $H(y, a, x - ay)$  restreinte à  $V$  ne dépend donc pas de  $a$  et permet de définir un germe de fonction méromorphe  $h$ . Les coefficients de  $H$  sont alors solutions du système de Cramer  $(S_h)$  obtenu à partir de  $h$ , ce qui implique que  $H = \rho(h)$ .

*Le cas d'un cycle réduit.* Soit maintenant  $V = V_{P_1} + \dots + V_{P_s} \in \mathcal{V}_{\text{red}}$  un cycle réduit de degré vertical  $d$ , où les  $V_{P_j}$ ,  $j = 1, \dots, s$ , sont des germes de cycles de dimension  $n$  irréductibles en les  $s$  points  $P_j$  distincts. Soit  $F_j = \Pi(V_{P_j})$  le polynôme de degré  $d_j$  associé à  $V_{P_j}$  et  $F = F_1 \dots F_s = \Pi(V)$  le polynôme de degré  $d$  associé à  $V$ . On note  $F_{[j]} = \prod_{l \neq j} F_l$ ,  $j = 1, \dots, s$  ; le fait que les germes n'aient pas de branches communes implique que les  $F_j$  sont premiers deux à deux ; par le théorème de Bézout, il existe  $s$  polynômes  $U_1, \dots, U_s \in \mathcal{M}[Y]$  tels que  $U_1 F_{[1]} + \dots + U_s F_{[s]} = 1$ . Soit  $h \in \mathcal{M}(V)$  la fonction méromorphe qui vaut  $h_j$  sur  $V_{P_j}$  et  $H_j = \rho(h_j)$  comme définie ci-dessus.

On définit  $\rho(h)$  comme le polynôme

$$\rho(h) := H := H_1 U_1 F_{[1]} + \dots + H_s U_s F_{[s]}.$$

On remarque que, pour  $k = 0, \dots, d - 1$ ,

$$\begin{aligned} \text{Res} \left[ \frac{y^k H \partial_y F(y, a, b) dy}{F(y, a, b)} \right] &= \sum_{j=1}^s \text{Res} \left[ \frac{y^k H \partial_y F_j(y, a, b) dy}{F_j(y, a, b)} \right] \\ &= \sum_{j=1}^s \text{Res} \left[ \frac{y^k H_j U_j F_{[j]} \partial_y F_j(y, a, b) dy}{F_j(y, a, b)} \right] \end{aligned}$$

par les règles usuelles du calcul résiduel (théorème de dualité) ; on obtient donc, en poursuivant suivant ces mêmes règles, et en exploitant les relations

$U_j F_{[j]} = 1 - \sum_{l \neq j} U_l F_{[l]}$ ,  $j = 1, \dots, k$ , les relations

$$\text{Res} \left[ \frac{y^k H \partial_y F(y, a, b) dy}{F(y, a, b)} \right] = \sum_{j=1}^k \text{Res} \left[ \frac{y^k H_j \partial_y F_j(y, a, b) dy}{F_j(y, a, b)} \right]$$

soit encore

$$\text{Res} \left[ \frac{y^k H \partial_y F(y, a, b) dy}{F(y, a, b)} \right] = \text{Tr}_{V_{P_1}} y^k h_1 + \dots + \text{Tr}_{V_{P_s}} y^k h_s = \text{Tr}_V y^k h$$

Le polynôme  $H := \rho(h)$  ainsi construit coïncide donc à nouveau avec l'unique polynôme de degré  $d - 1$  à coefficients dans  $\mathcal{M}$  dont les coefficients  $\tau = (\tau_0, \dots, \tau_{d-1})$  satisfont le système  $(S_h)$  (cette fois défini à partir des traces sur un cycle réduit et non sur un seul germe mais il reste de Cramer d'après le lemme 2). La résolution de ce système permet donc encore de trouver les coefficients de  $H$  dans le cas d'un cycle réduit. On voit ainsi (en se reportant au cas où  $V$  est irréductible) que l'on a les trois propriétés suivantes :

- le polynôme  $H = \rho(h)$  vérifie  $\partial_{a_i} H - Y \partial_{b_i} H \in (F)$  pour  $i = 1, \dots, n$  ;
- on a, pour  $j = 1, \dots, k$ ,

$$(\rho(h))(y, a, x - ay)|_{V_j} = H_j(y, a, x - ay)|_{F_j(y, a, x - ay)=0} = h_j(x, y) ;$$

- $\rho(h) = 0$  si et seulement si  $h|_V \equiv 0$  ; en effet,  $\rho(h) = 0$  implique que  $F_j$  divise  $H_j U_j F_{[j]}$  ; or  $F_j$  est premier avec  $U_j F_{[j]}$ , donc  $F_j$  divise  $H_j$  et  $H_j \equiv 0$  pour raisons de degré, soit encore  $h_j|_{V_{P_j}} \equiv 0$  et ce pour tout  $j = 1, \dots, s$ , donc  $h|_V \equiv 0$ .

Ces trois considérations montrent que l'application  $\rho$  reste définie et bijective dans le cas de germes en plusieurs points.  $\square$

**Remarque 8** En fait, on aurait pu définir  $H$  comme étant le polynôme d'interpolation de Lagrange prenant les valeurs de la fonction  $h(ay + b, y)$  en les racines de l'équation  $f(ay + b, y) = 0$  ; on vérifie alors grâce à l'équation d'onde de choc vérifiée par les racines que  $H$  ainsi construite vérifie les conditions  $(**)$  ; la construction de  $\rho$  a l'avantage d'être plus algébrique (on ne s'occupe plus des singularités) et plus descriptive.

Le fait que l'ensemble  $\{F(y, a, x - ay) = 0\}$  et la fonction  $H(y, a, x - ay)|_V$  ne dépendent pas de  $a$  permet de choisir la direction verticale  $a = 0$  dans les calculs de traces. On obtient ainsi le moyen de reconstituer un ensemble et

une forme à partir des restrictions de la trace d'un nombre fini de fonctions au sous-espace  $a = 0$  de la grassmannienne ; ceci paraît logique puisqu'il suffit d'une direction pour balayer un ensemble. Plus précisément, on a le théorème suivant :

**Théorème 1** *Pour connaître un cycle  $V \in \mathcal{V}$ , il est nécessaire et suffisant de connaître les germes en 0 des fonctions*

$$b \rightarrow \text{Tr}_V (y^k)(0, b), \quad k = 0, \dots, \text{Tr}_V (1);$$

*si  $V$  est un cycle réduit, pour connaître  $h \in \mathcal{M}(|V|)$ , il est nécessaire et suffisant de connaître les germes en 0 des fonctions*

$$b \rightarrow \text{Tr}_V (y^k h)(0, b), \quad k = 0, \dots, \text{Tr}_V (1) - 1.$$

**Preuve.** La preuve est contenue dans ce qui vient d'être fait. La connaissance de  $(V, h)$  donne la connaissance des traces. A l'inverse, la connaissance des traces de  $y^k$  sur  $a = 0$  permet de fabriquer le polynôme  $F(Y, 0, b)$  à partir des formules de Newton (on peut aussi se passer de ces formules et en utilisant le système de Cramer  $(S)$  mais il faut alors connaître les fonctions  $b \rightarrow \text{Tr}_V (y^k)(0, b)$  jusqu'à  $k = 2d - 1$ ). Si  $a = 0$ , le système  $(S_h)$  reste non dégénéré sur le corps des germes méromorphes en  $b$  d'après la remarque 5 (sinon toutes les droites "verticales" couperaient "mal"  $V$  ce qui est absurde). D'autre part, les traces  $v_k(0, b) = \text{Tr}_V y^k h(0, b)$  ont un sens sinon toutes les droites verticales couperaient le lieu polaire de  $h$  ce qui est à nouveau absurde. Ceci permet d'obtenir le polynôme  $H(Y, 0, b)$  via le système  $(S_h)$  en posant  $a = 0$  (et on montre ainsi que  $H(Y, 0, b)$  est bien défini). On a alors  $V = \{F(y, 0, x) = 0\}$  et la fonction méromorphe  $(x, y) \rightarrow H(y, 0, x)$  coïncide avec  $h$  sur  $V$ .  $\square$

Le cas des formes de degré maximal est analogue et le théorème suivant montre comment caractériser la trace d'une  $n$ -forme en termes de résidus de fonctions rationnelles d'une variable à coefficients méromorphes. Il suffit de l'énoncer dans le cas réduit d'après la remarque 4.

**Théorème 2** *Une  $n$ -forme  $\phi$  méromorphe au voisinage de l'origine dans  $\mathbb{C}_{a,b}^{2n}$  est la trace d'une  $n$ -forme méromorphe  $\Phi$  sur un cycle réduit  $V$  de  $\mathcal{V}$  de degré vertical  $d$  si et seulement s'il existe deux polynômes  $F$  et  $H$  tels que :*

- $F \in \mathcal{U}[Y]$ ,  $\deg_Y F = d$  ;
- $H \in \mathcal{M}[Y]$ ,  $\deg_Y H \leq d - 1$ , et  $H$  vérifie les relations algébriques  $\partial_{a_i} H - Y \partial_{b_i} H \in F$  pour tout  $i = 1, \dots, n$  (c'est-à-dire  $H \in \mathcal{M}_F[Y]$ ) ;

- on a l'égalité  $\phi(a, b) = \text{Tr}_V \Phi(a, b)$  avec la représentation :

$$\phi(a, b) = \text{Res} \left[ \begin{array}{c} H(\partial_y F - \sum_j a_j \partial_{b_j} F)(y, a, b) dy \wedge \bigwedge_{i=1}^n (db_i + y da_i) \\ F(y, a, b) \end{array} \right]_{(*)^3}$$

**Preuve.** Montrons tout d'abord que si  $V \in \mathcal{V}_{\text{red}}$  a pour degré vertical  $d$  et s'écrit  $V = V_{P_1} + \dots + V_{P_s}$ , les  $V_{P_j} = \{f_j = 0\}$ ,  $j = 1, \dots, s$ , étant des germes d'hypersurfaces réduites en  $k$  points distincts  $P_j$ , et si  $\Phi \in \mathcal{M}^n(|V|)$ , alors  $\text{Tr}_V \Phi$  se représente sous la forme  $(*)^3$ . La donnée d'une forme méromorphe sur  $|V|$  équivaut à la donnée d'une fonction méromorphe  $h \in M(|V|)$  qui vaut  $h_j$  sur  $V_{P_j}$  via l'égalité  $\Phi(x, y) = h(x, y)dx$ . On pose  $F_j = \Pi(V_{P_j})$ ,  $F = \Pi(V)$ ,  $H_j = \rho(h_j)$  et  $H = \rho(h)$ . D'après l'expression  $(\dagger\dagger)$  obtenue pour la trace d'une  $n$ -forme au paragraphe 2, les  $n+1$  coefficients  $w_0, \dots, w_n$  de la forme  $\text{Tr}_V(\Phi)$  sont donnés, pour  $k = 0, \dots, n$ , par :

$$w_k(a, b) := \sum_{j=1}^s \text{Res} \left[ \begin{array}{c} \theta_j y^k h_j \partial_y f(x, y) dx \wedge dy \\ f_j(x, y), x_1 - a_1 y - b_1, \dots, x_n - a_n y - b_n \end{array} \right].$$

Puisque  $f_j(x, y) = u_j(a, x, y)F_j(y, a, x - ay)$ , où  $u_j$  est inversible dans l'anneau local  $\mathbb{C}\{x, y - y_{P_j}, a\}$ , on peut remplacer  $f_j(x, y)$  par  $F_j(y, a, x - ay)$ . Or on a, pour  $j = 1, \dots, s$ ,

$$\partial_y(F_j(y, a, x - ay)) = \left( \partial_y F_j - \sum_{i=1}^n a_i \partial_{b_i} F_j \right)(y, a, x - ay),$$

et, suivant le même argument que dans la preuve du lemme 2, on obtient les égalités

$$w_k(a, b) = \sum_{j=1}^s \text{Res} \left[ \begin{array}{c} y^k h_j(ay + b, y) \left( \partial_y F_j - \sum_{i=1}^n a_i \partial_{b_i} F_j \right)(y, a, b) dy \\ F_j(y, a, b) \end{array} \right]$$

pour  $k = 0, \dots, n$ . D'après la formule  $(\dagger^3)$  (on l'écrit pour  $h = h_j$  et pour chaque facteur irréductible de  $F_j$  dans  $\mathcal{M}[Y]$  pour se ramener au cas irréductible,  $F_j$  étant simplement supposé réduit ici), on a  $(y, a, b) \rightarrow h_j(ay + b, y) - H_j(y, a, b)$  est dans l'idéal engendré par  $(y, a, b) \rightarrow F_j(y, a, b)$  dans  $\mathcal{M}\{y - y_{P_j}\}$  et on a donc, pour tout  $k = 0, \dots, n$ ,

$$w_k(a, b) = \sum_{j=1}^s \text{Res} \left[ \begin{array}{c} y^k H_j(y, a, b) \left( \partial_y F_j - \sum_{i=1}^n a_i \partial_{b_i} F_j \right)(y, a, b) dy \\ F_j(y, a, b) \end{array} \right].$$

Il reste à raisonner comme dans la construction de  $\rho$  (cas de plusieurs germes) pour conclure que l'on a les égalités

$$w_k(a, b) = \text{Res} \left[ \frac{y^k H(y, a, b) \left( \partial_y F - \sum_{i=1}^n a_i \partial_{b_i} F \right)(y, a, b) dy}{F(y, a, b)} \right], \quad k = 0, \dots, n$$

ce qui montre bien que  $\text{Tr}_V [h dx]$  est de la forme voulue.

Réciproquement, si  $\phi$  s'écrit sous la forme  $(*)^3$ , on peut poser  $V = \Pi^{-1}(F)$  et  $h = \rho^{-1}(H)$  pour constater (en prenant les calculs à l'envers) que l'on a bien  $\phi = \text{Tr}_V (h dx)$ . Le théorème 2 est ainsi démontré.  $\square$

On aboutit ainsi à une nouvelle caractérisation des formes traces (autre que celle donnée par exemple dans [9]) en termes cette fois de sommes complètes de résidus de fractions rationnelles en une variable de même dénominateur ; de telles sommes complètes de résidus s'obtiennent *via* l'algorithme de division euclidienne dans l'anneau  $\mathcal{M}[Y]$ . On remarque que les coefficients de la trace s'expriment sous la forme de l'action d'opérateurs différentiels non linéaires à coefficients polynomiaux en les coefficients  $\sigma_l$  de  $F$  et linéaires en les coefficients  $\tau_l$  de  $H$  et les dérivées partielles des  $\sigma_j$ .

## 4 Applications : le théorème d'Abel inverse et une majoration de la dimension de l'espace des $q$ -formes abéliennes

### 4.1 Une forme plus forte du théorème d'Abel inverse

On se propose dans cette section d'exploiter les résultats établis dans la section 3 pour démontrer la version suivante du théorème d'Abel inverse :

**Théorème 3** *Soit  $V \in \mathcal{V}_{\text{red}}$  un germe de cycle effectif réduit intersectant proprement  $\Delta$  (en des points  $P_j$ ,  $j = 1, \dots, s$  distincts du point à l'infini) et de degré vertical  $d$  ; soit  $\Phi \in M^n(V)$ , non identiquement nulle sur aucune des composantes de  $|V|$ . Si la trace de  $\Phi$  sur  $V$  (considérée comme germe de  $n$ -forme méromorphe à l'origine de  $\mathbb{C}_{(a,b)}^{2n}$ ) est le germe d'une forme rationnelle en  $b$ , alors l'ensemble analytique  $|V|$  est inclus dans une hypersurface algébrique  $\tilde{V}$  de degré  $d$  telle que  $\tilde{V} \cap \Delta = \{P_1, \dots, P_s\}$  et la forme  $\Phi$  se prolonge en une  $n$ -forme rationnelle sur  $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$ .*

**Remarque 9** Il est essentiel de supposer que  $\Phi$  n'est identiquement nulle sur aucune des composantes irréductibles du cycle analytique  $V$ . En effet, si ce n'était pas le cas, on n'obtiendrait bien sûr aucune information relative aux composantes de  $V$  sur lesquelles  $\Phi$  serait identiquement nulle ; on pourrait seulement conclure que les autres composantes sont algébriques.

**Preuve du théorème 3.** On peut toujours supposer que  $\Phi = h(x, y)dx$ , où  $h \in M(V)$ . Soit  $H = \rho(h)$  et  $F = \Pi(V)$ . On suppose que  $F$  s'écrit

$$F(Y, a, b) = Y^d - \sigma_{d-1}(a, b)Y^{d-1} + \dots + (-1)^{d-1}\sigma_0(a, b).$$

On introduit maintenant les germes de fonctions méromorphes à l'origine de  $\mathbb{C}_{(a,b)}^{2n}$  :

$$w_k(a, b) := \text{Res} \left[ \frac{y^k H(y, a, b) \left( \partial_y F - \sum_{i=1}^n a_i \partial_{b_i} F \right)(y, a, b) dy}{F(y, a, b)} \right], \quad k = 0, \dots, n.$$

D'après la formule ( $\dagger\dagger$ ) établie dans la section 2, la rationalité en  $b$  de  $(a, b) \rightarrow \text{Tr}_V(h dx)$  implique la rationalité en  $b$  des  $w_k$ ,  $k = 0, \dots, n$ . Nous aurons besoin du lemme technique suivant, concernant le comportement de la suite  $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ .

**Lemme 4** *La suite  $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$  obéit aux trois règles suivantes :*

- (1) *Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on a*

$$\partial_{a_i}(w_k) = \partial_{b_i}(w_{k+1})$$

*(équations d'onde de choc avec décalage) ;*

- (2)  *$w_k$  est une fonction rationnelle en  $b$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  ;*
- (3) *les  $w_k$   $k = 0, \dots, 2d-1$  vérifient le système linéaire  $(\tilde{S}_h)$  suivant :*

$$\begin{array}{ccccccc} w_{d-1}\sigma_{d-1} & + & \cdots & + & (-1)^{d-1}w_0\sigma_0 & = & w_d \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ w_{2d-2}\sigma_{d-1} & + & \cdots & + & (-1)^{d-1}w_{d-1}\sigma_0 & = & w_{2d-1} \end{array}$$

**Preuve du lemme 4.** Pour le point (1), il suffit de faire le calcul directement à partir de l'écriture des  $w_l$  en termes de symboles résiduels, telle que nous l'avons introduite au paragraphe 2 (voir la formule ( $\dagger\dagger$ )) :

$$w_k(a, b) = \text{Res} \left[ \frac{y^k h \partial_y f(x, y) dx \wedge dy}{f(x, y), x_1 - a_1 y - b_1, \dots, x_n - a_n y - b_n} \right].$$

L'écriture explicite du résidu sous forme de représentation intégrale impliquant le noyau de Cauchy (voir par exemple [8], chapitre 6) montre que l'on peut différentier les symboles résiduels par rapport aux paramètres en différentiant sous le symbole, donc que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\begin{aligned}
\partial_{a_i}(w_k) &= -\text{Res} \left[ \frac{y^k h \partial_y f(x, y) \partial_{a_i}(L_i) dx \wedge dy}{f(x, y), L_1, \dots, L_i^2, \dots, L_n} \right] \\
&= \text{Res} \left[ \frac{y^{k+1} h \partial_y f(x, y) dx \wedge dy}{f(x, y), L_1, \dots, L_i^2, \dots, L_n} \right] \\
&= -\text{Res} \left[ \frac{y^{k+1} h \partial_y f(x, y) \partial_{b_i}(L_i) dx \wedge dy}{f(x, y), L_1, \dots, L_i^2, \dots, L_n} \right] \\
&= \partial_{b_i}(w_{k+1})
\end{aligned}$$

(on rappelle que  $L_i(x, y, a, b) := x_i - a_i y - b_i$  pour  $i = 1, \dots, n$ ).

On montre le point **(2)** par récurrence sur  $k$ . C'est vrai pour  $k = 0, \dots, n$  par hypothèse. On suppose la propriété vraie jusqu'au rang  $k - 1$ .

On suppose dans un premier temps que  $w_k \neq 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . On va reprendre l'astuce utilisée par G. Henkin et M. Passare [12] pour éviter les pôles simples (ce point, qui est aussi directement inspiré de l'article fondateur d'Abel [1, 3], paraît être le point clef de la démonstration). On pose pour cela  $w'_k = w_k + c w_{k-1}$  où  $c \in \mathbb{C}^*$ . D'après le point **(1)**, on a, pour  $i = 1, \dots, n$ , les deux égalités

$$\begin{aligned}
\partial_{b_i}(w'_k) &= \partial_{b_i}(w_k + c w_{k-1}) = \partial_{a_i}(w_{k-1} + c w_{k-2}) = \partial_{a_i}(w'_{k-1}) \\
\partial_{b_i}(w'_k) &= (\partial_{a_i} + c \partial_{b_i})(w_{k-1}).
\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction  $\partial_{b_i}(w'_k)$  admet-elle les deux primitives distinctes  $w_{k-1}$  et  $w'_{k-1}$  dans les deux directions linéairement indépendantes  $a_i$  et  $a_i + c b_i$  (car  $w_{k-2} \neq 0$  par l'hypothèse faite pour l'instant). Or par hypothèse  $\partial_{b_i}(w'_k) = (\partial_{a_i} + c \partial_{b_i})(w_{k-1})$  est rationnelle en  $b_i$ ; le fait que cette fonction méromorphe ait deux primitives distinctes dans deux directions linéairement indépendantes exclut que dans la décomposition en éléments simples de cette fraction rationnelle dans  $\overline{\mathcal{M}_{a, \hat{b}_i}}(b_i)$  (ici  $\overline{\mathcal{M}_{a, \hat{b}_i}}$  désigne une clôture intégrale du corps des germes de fonctions méromorphes en  $a, b_1, \dots, \hat{b}_i, \dots, b_n$  à l'origine de  $\mathbb{C}^{2n-1}$ ), on puisse rencontrer un terme du type

$$\frac{\alpha_{a, \hat{b}_i}}{b_i - \beta(a, \hat{b}_i)},$$



ce qui permet d'intégrer selon la variable  $b_i$  et d'obtenir ainsi une nouvelle fraction rationnelle en  $b_i$  (il ne peut plus y avoir de pôles simples et donc de logarithme dans la primitive). Puisque  $w_k = w'_l - cw_{k-1}$ , alors  $w_k$  est rationnelle en  $b_i$  puisque à la fois  $w'_l$  et  $w_{l-1}$  le sont.

Si maintenant  $w_k = 0$  pour un  $k \in \mathbb{N}$  (on prend le plus petit  $k$  pour lequel ceci se produit), alors, puisque  $0 = \partial_{a_i}(w_k) = \partial_{b_i}(w_{k+1})$  pour  $i = 1, \dots, n$ , la fonction  $w_{k+1}$  ne dépend pas de  $b$ ; comme  $\partial_{b_i}(w_{k+2}) = \partial_{b_i}(w_{k+1})$ , la fonction  $w_{k+2}$  est en fait polynômiale de degré 1 en  $b$ ; de proche en proche, on montre alors que  $w_{k+j}$  est polynômiale de degré  $\leq j$  en  $b$ .

Dans l'une ou l'autre situation envisagées, nous avons prouvé le point **(2)**.

Le point **(3)** résulte simplement des identités

$$\text{Res} \left[ \frac{y^k H(y, a, b) F(y, a, b) \left( \partial_y F - \sum_{i=1}^n a_i \partial_{b_i} F \right)(y, a, b) dy}{F(y, a, b)} \right] = 0$$

pour tout  $k \in \mathbb{N}$  (propriété du calcul résiduel), qui, une fois  $F$  développé au numérateur, font bien apparaître que les  $w_k$  vérifient le système linéaire  $(\tilde{S}_h)$ .

Le lemme 4 est donc ainsi démontré.  $\square$

**Remarque 10** On retrouve ici, en prouvant la clause **(1)** du lemme 4, que la trace d'une  $n$ -forme est une forme fermée (en dehors de son lieu polaire) en utilisant son expression  $(\dagger\dagger)$  en termes des  $w_k$  introduits ci-dessus; ceci est en fait une conséquence du fait que

$$d(\Phi \wedge [V]) = d\Phi \wedge [V] = 0$$

dans le cas où  $\Phi$  est une forme de degré maximal sur  $V$  et du fait que  $d$  commute avec le pull-back et l'image directe.

Avant de reprendre la preuve du théorème 3, prouvons le second lemme auxiliaire suivant :

**Lemme 5** *Le système  $(\tilde{S}_h)$  est un système de Cramer.*

**Preuve du lemme 5.** On raisonne par l'absurde en supposant que  $(\tilde{S}_h)$  est un système dégénéré. On peut donc, dans ce cas, construire un polynôme

$Q \in \mathcal{M}[Y]$ , unitaire et de degré  $d$ , différent de  $F$ , et tel que

$$\text{Res} \left[ \frac{y^l H(y, a, b) Q(y, a, b) \left( \partial_y F - \sum_{i=1}^n a_i \partial_{b_i} F \right) (y, a, b) dy}{F(y, a, b)} \right] = 0$$

pour  $k = 0, \dots, d-1$ . Le théorème de dualité dans le contexte algébrique (voir le rappel en fin de section 2) implique que le polynôme  $Q H (\partial_y F - \sum_i a_i \partial_{b_i} F)$  est dans l'idéal engendré par  $F$  dans  $\mathcal{M}[Y]$ . Puisque  $Q \neq F$  et que  $F$  est réduit, il existe forcément un facteur irréductible  $F_j$  de  $F$  (une fois  $F$  décomposé dans  $\mathcal{M}[Y]$ ) qui ne divise pas  $Q$ . Dans ce cas, le polynôme  $F_j$  divise  $H(\partial_y F - \sum_i a_i \partial_{b_i} F)$ . Deux situations sont alors envisageables :

- le polynôme  $F_j$  divise  $H$ , mais alors  $H(y, 0, x)|_{V_j = \{F_j(y, 0, x) = 0\}} = 0$  et on tombe sur le cas pathologique (et exclus) où la forme  $\Phi$  est identiquement nulle sur la composante  $V_j$  ;
- le polynôme  $F_j$  divise  $\partial_y F - \sum_i a_i \partial_{b_i} F$  ; en notant  $F = F_j \tilde{F}$  ( $F_j$  et  $\tilde{F}$  étant premiers entre eux), on a alors :

$$\partial_y F - \sum_{i=1}^n a_i \partial_{b_i} F = F_j \tilde{F} \left( \partial_y F_j - \sum_{i=1}^n a_i \partial_{b_i} F_j \right) + F_j \left( \partial_y \tilde{F} - \sum_{i=1}^n a_i \partial_{b_i} \tilde{F} \right),$$

ce qui implique que  $F_j$  divise  $\tilde{F}(\partial_y F_j - \sum_i a_i \partial_{b_i} F_j)$  et, par le lemme de Gauss, que  $F_j$  divise  $\partial_y F_j - \sum_i a_i \partial_{b_i} F_j$  ; pour des raisons de degré, la seule possibilité est  $\partial_y F_j - \sum_i a_i \partial_{b_i} F_j = 0$  ce qui implique que  $\partial_y (F_j(y, a, x - ay)) = 0$  ; mais alors l'équation de la branche  $V_j = \Pi(F_j)$  ne dépend donc pas de  $y$  et  $V_j$  est forcément la droite verticale  $x = 0$ , ce qui est exclus puisque  $V$  intersecte proprement cette droite.

Les deux situations pouvant poser problème ayant de fait été exclues par hypothèses, le système  $(\tilde{S}_h)$  est bien de Cramer, ce qui achève la preuve du lemme 5.  $\square$

**Suite de la preuve du théorème 3.** En combinant les lemmes 4 et 5, on voit que  $\sigma_0, \dots, \sigma_{d-1}$  s'expriment rationnellement en fonction des  $w_k$ ,  $k = 0, \dots, 2d-1$ . Les coefficients de  $F$  sont donc rationnels en  $b$  et l'ensemble

$$\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 ; F(y, 0, x) = 0\}$$

définit une hypersurface algébrique de  $\mathbb{P}^{n+1}$  qui contient  $V$  et dont le degré est donné par

$$\text{Tr}_{\tilde{V}}(1) = \text{Res} \left[ \frac{\partial_y F(y, a, b) dy}{F(y, a, b)} \right] = d,$$

ce qui montre le premier volet de la conclusion du théorème (il existe une hypersurface algébrique de degré  $d$  contenant le support de  $V$  et ne rencontrant la droite projective  $\Delta$  qu'aux points  $P_1, \dots, P_s$ ).

On peut d'ailleurs faire à ce stade de la preuve la remarque suivante :

**Remarque 11** Si  $F \in \mathcal{U}[Y]$ , avec de plus des coefficients rationnels en  $b$  (ce qui est le cas ici) on sait, d'après la remarque 6, que le lieu polaire des coefficients de  $F$ , considérés comme des éléments de  $\mathcal{M}_a(b)$ , où  $\mathcal{M}_a$  désigne le corps des germes de fonctions méromorphes en  $a$  à l'origine de  $\mathbb{C}^n$ , ne saurait dépendre de  $b$ ; les coefficients d'un tel polynôme  $F$  sont donc automatiquement polynômiaux en  $b$  dès qu'ils sont rationnels en  $b$ ; en fait, on montre aisément en écrivant les conditions (\*) qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément  $Y^d - \sigma_{d-1}Y + \dots + (-1)^{d-1}\sigma_0$  de  $\mathcal{U}[Y]$  ait ses coefficients rationnels en  $b$  est que  $\sigma_{d-1}$  soit une fonction affine de  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Dans notre contexte, ce coefficient correspond à la trace de  $y$  sur  $V$  et on retrouve ainsi le théorème de J. Wood [14] : une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de  $\tilde{V}$  est le fait que  $\text{Tr}_V(y)$  soit affine en  $b$ . Construire la trame logique reliant les énoncés d'Abel inverse et de Wood était en fait la première motivation de ce travail, ce au regard de l'effectivité de la construction de J. Wood.

**Suite et fin de la preuve du théorème 3.** On montre maintenant la rationalité de  $\Phi$ . On introduit pour cela les coefficients holomorphes  $\xi_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , impliqués dans la définition des traces  $\text{Tr}_V(y^k dx)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  et définis par

$$\xi_k := \text{Res} \left[ \frac{y^k \left( \partial_y F - \sum_{i=1}^n a_i \partial_{b_i} F \right) (y, a, b) dy}{F(y, a, b)} \right], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Les coefficients de  $H$  vérifient (on le voit en développant  $H$ ) le système

$$(\check{S}_h) \quad \begin{array}{ccccccc} \xi_{d-1} \tau_{d-1} & + & \cdots & + & \xi_0 \tau_0 & = & w_0 \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ \xi_{2d-2} \tau_{d-1} & + & \cdots & + & \xi_{d-1} \tau_0 & = & w_{d-1} \end{array}$$

Comme précédemment (voir la preuve du lemme 5), on peut montrer que ce système est un système de Cramer. Puisque les coefficients de  $F$  sont rationnels en  $b$ , les fonctions  $\xi_l$  le sont et les coefficients  $\tau_k$  le sont aussi ce qui permet de conclure que  $H$  a ses coefficients rationnels en  $b$ . D'après la preuve du théorème 1, la forme  $H(y, 0, x) dx$  est bien définie. Elle définit donc

une forme  $\tilde{\Phi}$  rationnelle sur  $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$  prolongeant la forme  $\Phi$ . Ceci achève la preuve du théorème 3.  $\square$

**Remarque 12** a) Cette preuve s'adapte à la version locale d'Abel-inverse : si la trace se prolonge à un ouvert  $\tilde{D}^*$  contenant  $D^*$ , alors l'ensemble  $V$  et la forme  $\Phi$  se prolongent à l'ouvert 1-concave  $\tilde{D}$  (contenant  $D$ ) dont le dual est  $\tilde{D}^*$ .

b) Les bijections  $\Pi$  et  $\rho$  permettent de montrer que toute propriété vérifiée par  $\text{Tr}_V(h(x, y)dx)$  se répercute en une propriété (en les variables  $b_1, \dots, b_n$ ) pour les coefficients des polynômes  $F = \Pi(V)$  et  $H = \rho(V)$ . C'est alors le fait que les applications  $V = \Pi^{-1}(F)$  et  $h = \rho^{-1}(H)$  ne se soucient pas du comportement en  $a$  de  $F$  et  $H$  qui permet de basculer les propriétés de  $\text{Tr}_V(h(x, y)dx)$  en des propriétés relatives à  $V$  et  $h$  ; par exemple, si la trace de  $\Phi$  sur  $V$  est algébrique, on doit pouvoir montrer (toujours avec l'argument des deux primitives) que  $F$  et  $H$  sont algébriques en  $b$  ; Ainsi en multipliant alors les "conjugués" de  $F$  (définis *via* les automorphismes de l'extension galoisienne finie de  $\mathbb{C}\{a\}(b)$  engendrée par les coefficients  $\sigma_k(a, b)$  de  $F$ ), on va fabriquer deux nouveaux polynômes  $\tilde{F}$  et  $\tilde{H}$  à coefficients rationnels vérifiant les conditions (\*) et (\*\*); ils donneront alors naissance *via*  $\Pi^{-1}$  et  $\rho^{-1}$  à un ensemble algébrique  $\tilde{V}$  (dont le degré sera le degré de  $F$  multiplié par le degré de l'extension) et à une forme rationnelle  $\tilde{\Phi}$  tels que  $V \subset \tilde{V}$  et  $\tilde{\Phi}|_V = \Phi$ . On retrouve dans ce cas le théorème d'Abel inverse version algébrique montré par S. Collion (voir [4]).

Il semble également intéressant de souligner qu'une fois le degré vertical  $d$  précisé, le théorème d'Abel inverse permet d'affirmer que toutes les solutions  $(\sigma_0, \dots, \sigma_{d-1}, \tau_0, \dots, \tau_{d-1}) \in (\mathcal{O}_{(a,b)})^d \times (\mathcal{M}_{(a,b)})^d$  du système linéaire du premier ordre en les inconnues  $\tau_j, j = 0, \dots, d-1$ , différentiel polynomial du premier ordre en les inconnues  $\sigma_j, j = 0, \dots, d-1$ , avec second membre donné  $\Psi$ , s'écrivant :

$$\begin{aligned} F &= Y^d - \sigma_{d-1}Y^{d-1} + \dots + (-1)^d \sigma_0 \in \mathcal{U}[Y] \\ H &= \tau_{d-1}Y^{d-1} + \dots + \tau_1 Y + \tau_0 \in \mathcal{M}_F[Y] \\ \text{Res} \left[ \begin{array}{c} H(\partial_y F - \sum_j a_j \partial_{b_j} F)(y, a, b) dy \wedge \bigwedge_{i=1}^n (db_i + y da_i) \\ F(y, a, b) \end{array} \right] &= \Psi(a, b) \end{aligned}$$

sont des solutions rationnelles (si  $F$  et  $H$  sont supposés premiers entre eux) ou tout au moins algébriques (si cette dernière restriction n'est pas imposée)

dès que le second membre (c'est-à-dire la  $n$ -forme  $\Psi$ ) est une forme rationnelle. Comme le lieu polaire des  $\sigma_l \in \mathcal{M}_{(a,b)}$  ne dépend pas de  $b$  dès que  $F = Y^d - \sigma_{d-1}Y^{d-1} + \dots + (-1)^d\sigma_0$  vérifie les conditions  $(*)$  (voir la remarque 6), on voit d'ailleurs que la rationalité du second membre  $\Psi$  implique la rationalité des solutions  $(\sigma, \tau)$  du système dans  $(\mathcal{M}_{(a,b)})^{2d}$  (on perturbe  $a = 0$  en prenant  $a$  générique voisin de 0 de manière à se ramener au cas où  $F \in \mathcal{U}[Y]$ ). Cette remarque indique que l'on peut concevoir le théorème Abel inverse comme un résultat de *rigidité* relatif à un système différentiel non linéaire d'un type très particulier (linéaire d'ordre 0 en  $\tau$ , d'ordre 1 en les dérivées de  $\sigma$ , polynômial en  $\sigma$ ). Il nous paraît dès lors important de formuler de manière identique (c'est-à-dire en terme de rigidité d'un certain système différentiel du même type) les théorèmes du type Abel inverse où la grassmannienne se trouve remplacée par une famille de courbes (ou bien la variété ambiante  $\mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$  remplacée par exemple par une variété torique complète simpliciale de dimension  $n + 1$  correspondant à un polytope de Delzant et par conséquent plongée dans un certain  $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ ); on trouve par exemple une généralisation du théorème classique d'Abel inverse dans [5], pouvant servir de point de départ pour ces nouvelles approches.

Notons aussi que, si seulement la machinerie élémentaire du calcul résiduel en une variable s'est trouvée impliquée ici, il est vraisemblable que les généralisations évoquées nécessiteront une utilisation des outils du calcul de résidus en plusieurs variables complexes cette fois dans toute leur puissance.

J'espère revenir sur ces diverses questions et généralisations dans des travaux ultérieurs.

## 4.2 A propos de la dimension de l'espace des $q$ -formes abéliennes

Soit  $V$  une hypersurface algébrique réduite de  $\mathbb{P}^{n+1}$ . On cherche à caractériser l'ensemble  $\omega^n(V)$  des formes abéliennes sur  $V$ , *i.e.* des formes dont la trace sur  $V$  est nulle. (Car holomorphe sur toute la grassmannienne). On peut toujours choisir un système de coordonnées pour lequel  $V$  est coupée proprement par  $\Delta = \{x = 0\}$  et ce en  $s$  points de l'espace affine  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Au voisinage de cette droite,  $V$  permet donc de définir un élément  $V_1 + \dots + V_s$  de  $\mathcal{V}_{\text{red}}$  de degré vertical  $d$ . D'après le théorème 1, toute forme  $\Phi = hdx$  méromorphe sur  $V$  est uniquement déterminée par les  $d$  fonctions de  $v_k(0, b) = \text{Tr}_V y^k h(0, b)$ ,  $k = 0, \dots, d - 1$ . Pour  $a = 0$  on remarque que l'on a en fait  $v_k(0, b) = w_k(0, b)$ . Or les  $w_k$ ,  $k = 0, \dots, n$  sont les coefficients de la trace, et dans le cas des formes de trace nulle, on a

$w_0 = \dots = w_n = 0$  et  $w_{n+j}$  est polynômial en  $b$  de degré  $\leq j - 1$  pour tout  $j$  (d'après la preuve de la propriété 3 du lemme 4). Une forme abélienne est ainsi uniquement déterminée par la collection de  $d - n - 1$  polynômes de  $n$  variables  $P_i(b) := w_{n+i}(0, b)$ ,  $i = 1, \dots, d - n - 1$  avec  $\deg P_i \leq i - 1$  (il n'y a donc pas de forme abélienne non nulle dans le cas  $d < n$ ). Ainsi l'espace des  $n$  formes abéliennes sur une hypersurface algébrique réduite  $V \subset \mathbb{P}^{n+1}(\mathbb{C})$  de degré  $d$  s'identifie à un sous-espace de l'espace vectoriel des  $d - n - 1$  uplets de polynômes  $(P_1, \dots, P_{d-n-1})$  tels que  $\deg P_i \leq i - 1$ ; comme ce dernier espace est de dimension  $\binom{d-1}{n+1}$ , la dimension de l'espace vectoriel  $\omega^n(V)$  est bien majorée par  $\binom{d-1}{n+1}$ .

Pour montrer que la majoration est atteinte, on considère les formes rationnelles s'écrivant localement au voisinage de la droite verticale sous la forme :

$$\Phi(x, y) = \frac{P(x, y)}{\partial_y f(x, y)} dx$$

où

$$P(x, y) = a_0 y^{d-n-2} + a_1(x) y^{d-n-3} + \dots + a_{d-n-2}(x) \quad \deg a_i \leq i$$

est un polynôme en  $(x, y)$  de degré total inférieur ou égal à  $d - n - 2$  et  $f$  est un polynôme de degré  $d$  (non divisible par  $x$ , comme dans le cas des germes) donnant l'équation affine  $f(x, y) = 0$  de  $V$  au voisinage de la droite verticale  $x = 0$ . Dans ce cas, on a :

$$Tr_V \Phi(a, b) = \sum_{k=0}^n \left( w_k(a, b) \left( \sum_{|I|=k} da_I \wedge db_{I^c} \right) \right)$$

et à partir de l'écriture (††) du paragraphe 2, puis en utilisant le lemme 2, on obtient cette fois

$$w_k(a, b) = \text{Res} \left[ \frac{y^k P(ay + b, y) dy}{F(y, a, b)} \right].$$

Or, si  $k \leq n$ ,  $\deg(y^k P(ay + b, y)) \leq d = \deg F - 2$  d'où la nullité des  $w_k(a, b)$  pour tout  $k = 0, \dots, n$ . Toute forme ainsi définie est donc une forme abélienne. De plus, toujours par le théorème de dualité, on constate que le polynôme en  $y$   $P(ay + b, y)$  (et donc le polynôme  $P \in \mathbb{C}[x, y]$ ) est entièrement caractérisé par les  $w_k(a, b)$   $k = n + 1, \dots, d - 1$ . Ces dernières fonctions caractérisant entièrement la forme de trace nulle  $\Phi|_V$ , la dimension de l'espace vectoriel des

formes abéliennes se trouve minorée par la dimension de l'espace vectoriel des polynômes  $P(x, y)$  de degré inférieur ou égal à  $d - n - 2$  qui est exactement  $\binom{d-1}{n+1}$ . On retrouve ainsi l'égalité :

$$\dim \omega^n(V) = \binom{d-1}{n+1}$$

avec une écriture affine explicite des formes abéliennes de degré maximales sur une hypersurface algébrique. On peut noter que travailler par dualité avec la trace permet de ne pas se soucier du comportement de  $\Phi$  à l'infini (contrairement aux caractérisations des formes abéliennes en général, par exemple [11]). Le fait que  $\Phi$  (dans son écriture affine) n'ait pas de pôles sur l'hyperplan à l'infini (sauf éventuellement sur  $V$ ) est impliqué par la nullité de la trace : on évite ainsi les changements de carte de  $\mathbb{P}^{n+1}$ .

On s'intéresse maintenant à l'espace  $\omega^q(V)$  des  $q$ -formes abéliennes sur une hypersurface algébrique réduite  $V \subset \mathbb{P}^{n+1}$  de degré vertical  $d$ . Au voisinage de la droite verticale, toute  $q$ -forme rationnelle  $\Phi$  peut s'écrire

$$\Phi = \sum_{|I|=q} h_I dx_I,$$

où les  $h_I$  sont des fonctions rationnelles de  $(x, y)$ . D'après le théorème 1, pour connaître  $h_I$  il est nécessaire et suffisant de connaître les  $d$  fonctions

$$t_{I,k}(0, b) := \text{Tr}_V [y^k h_I](0, b), \quad k = 0, \dots, d-1,$$

définies par

$$t_{I,k} = \text{Res} \left[ \frac{Y^k h_I(Y, b) \partial_Y F(Y, 0, b) dY}{F} \right],$$

où  $F = \Pi(V)$  (on se restreint ici à la carte affine  $\mathbb{C}^{n+1}$  dans laquelle on travaille et dans laquelle  $V = \{f(x, y) = 0\}$ ). Si l'on se restreint aux droites verticales, l'expression des coefficients de la trace d'une  $q$ -forme se simplifie ; plus précisément, on a défini dans l'introduction le courant  $T$  par

$$T = \Phi \wedge df \wedge \left( \bigwedge_{j=1}^n dL_j \right) \wedge \bar{\partial} \left( \frac{1}{f} \right) \wedge \left( \bigwedge_{j=1}^n \partial \left( \frac{1}{L_i} \right) \right).$$

On a alors ici

$$\Phi \wedge df \wedge \left( \bigwedge_{j=1}^n dL_j \right) = \sum_{|I|=q} h_I \partial_y f dx_I \wedge dy \wedge \bigwedge_{j=1}^n (dx_j - a_j dy - y da_j - db_j).$$

On peut supposer ici qu'il n'y a pas les termes  $a_i dy$  puisqu'on s'intéresse aux coefficients de la trace restreints à  $a_1 = \dots = a_n = 0$  pour caractériser les  $h_i$ ; de plus on ne garde que les termes  $da_K \wedge db_L$  pour  $|K| + |L| = q$  puisque l'on fait agir  $T$  sur les formes-test de  $D \times D^*$  de bidegré  $(2n - q, 2n)$  (en  $(a, b)$ ). Dans ce cas, on trouve une expression simplifiée

$$\Phi \wedge df \wedge \bigwedge_{j=1}^n dL_j = \sum_{|I|=q} h_I \partial_y f dx_I \wedge dx_{I^c} \wedge dy \wedge \left( \sum_{J \subset I, |J|=0}^q \pm y^{|J|} da_J \wedge db_{I \setminus J} \right)$$

et l'on a

$$\mathrm{Tr}_V [\Phi](0, b) = \sum_{|I|=q} \sum_{J \subset I, |J|=0}^q \pm \mathrm{Res} \left[ \frac{Y^{|J|} h_I(Y, b) \partial_Y F(Y, 0, b) dY}{F} \right] da_J \wedge db_{I \setminus J}$$

Comme dans le cas des  $n$ -formes, le fait que la trace soit nulle implique alors  $t_{I,k} = 0$  pour tout  $k = 0, \dots, q$  et  $\deg_b[t_{I,q+k}] < k$  pour tout  $k > 0$ , et ce pour tout multi-indice  $I \subset \{1, \dots, n\}$  de longueur  $q$ . Chaque  $h_I$  est alors uniquement déterminé par la collection de polynômes

$$\{t_{I,q+k}(0, b) \in \mathbb{C}[b]; k = 1, \dots, d - q - 1; \deg_b[t_{I,q+k}] < k\}.$$

Puisqu'il y a un nombre  $\binom{n}{q}$  de multi-indice  $I \subset \{1, \dots, n\}$  de longueur  $q$  et que l'ensemble des collections possibles pour chaque  $I$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  de dimension  $\binom{d+n-q-1}{n+1}$  on retrouve le fait que l'espace des  $q$ -formes abéliennes sur une hypersurface algébrique de degré  $d$  est un espace vectoriel de dimension finie majorée par le nombre de Castelnuovo  $\pi_q(d, 2, n)$  :

$$\dim \omega^q(V) \leq \pi_q(d, 2, n) := \binom{n}{q} \binom{d+n-q-1}{n+1}$$

Cependant, contrairement à ce qui se passe dans le cadre particulier des formes abéliennes de degré maximal (pour lesquelles on peut également profiter du fait que la trace soit  $d$ -fermée), on ne peut pas conclure dans ce cas que la borne est atteinte. En fait si on suppose chaque  $h_I$  sous la forme  $\frac{P_I}{\partial_y f}$  avec  $\deg P_I \leq d - q - 2$  on obtient des formes abéliennes, mais cette fois deux écritures distinctes peuvent être égales modulo  $(f, df)$ , donc donner la même forme sur  $V$ . Ainsi, le défaut entre la borne de Castelnuovo et la dimension de  $\omega^q(V)$  dépend cette-fois de la différentielle de  $f$  donc des singularités de



$V$  : par exemple, si  $V$  est une hypersurface lisse de  $\mathbb{P}^3$ , l'espace vectoriel  $\omega^1(V)$  est réduit à 0 ce qui n'est à priori pas le cas si  $V$  est singulière. Le cas des  $q$ -formes abéliennes ( $q < n$ ) est beaucoup plus délicat que celui des formes de degré maximales (voir par exemple [11]) et est peut-être un bon terrain de recherche.

## Références

- [1] N.H. Abel, Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendentes, note présentée à L'Académie des sciences à Paris le 30 Octobre 1826, *Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel*, Christiania, 1881, vol 1, 145-211.
- [2] D. Barlet, Le faisceau  $\omega_X^\bullet$  sur un espace analytique  $X$  de dimension pure, *Lecture Notes in Math.* 670, Springer-Verlag, 1978, 187-204.
- [3] J.E. Björk, Residues and  $\mathcal{D}$ -modules, dans *The Legacy of Niels Henrik Abel, The Abel Bicentennial*, Oslo 2002 Laudal, Olav Arnfinn ; Piene, Ragni (Eds.), Springer-Verlag, 2004, pp. 605-652.
- [4] S. Collion, Transformation d'Abel et formes différentielles algébriques, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 323, 1996, no. 12, 1237-1242.
- [5] B. Fabre, Nouvelles variations sur les théorèmes d'Abel et Lie, Thèse soutenue le 04/12/2000, Institut de Mathématiques de Jussieu, Paris 6.
- [6] B. Fabre, On Abel-Radon transform of locally residual currents, *preprint*, 2004, math.CV/040240.
- [7] P.A. Griffiths, Variations on a theorem of Abel, *Inventiones math.* 35, 1976, 321-390.
- [8] P.A. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Pure and applied mathematics, Wiley-Intersciences, 1978.
- [9] G. Henkin La transformation de Radon pour la cohomologie de Dobeault et un théorème d'Abel-inverse, *C. R. Acad. sci.Paris*, t.315, série I, 1992, 973-978.
- [10] G. Henkin, Abel-Radon transform and applications, dans *The Legacy of Niels Henrik Abel, The Abel Bicentennial*, Oslo 2002 Laudal, Olav Arnfinn ; Piene, Ragni (Eds.), Springer-Verlag, 2004, pp. 567-584.
- [11] A. Hénaut, formes différentielles abéliennes, bornes de Castelnuovo et géométrie des tissus, *Comment. Math. Helv.* 79, 2004, 25-57.
- [12] G. Henkin, M. Passare, Abelian differentials on singular varieties and variation on a theorem of Lie-Griffiths, *Inventiones math.* 135, 297-328, 1999.

- [13] M. Passare, Residues, currents, and their relation to ideals of meromorphic functions, Math. Scand. 62, 1988, 75-152.
- [14] J.A. Wood, a simple criterion for an analytic hypersurface to be algebraic, Duke Mathematical Journal 51, 1, 1984, 235-237.
- [15] A. Yger, La transformée de Radon sous ses différents aspects, Notes d'un cours de DEA, Bordeaux, 2002, *manuscrit*.